

Chapitre 10

Résultats applicables:

- en régime permanent
- en ARQP

I] Forces de Laplace application: vitesses électrique

1) Densité volumique des forces de Laplace

Force de Laplace = force exercée par \vec{B} dans un courant

origine = force de Lorentz sur chaque porteur de charge participant au courant

porteur q_i : $\vec{f}_i = q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}$; dans des autres de dt , il y a $n_i dt$ tels porteurs

→ Résultante des forces exercées par \vec{B} sur les porteurs dans dt :

$$d\vec{F}_i = \sum_{i=1}^P n_i dt \vec{f}_i = \sum_{i=1}^P n_i q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B} dt = \vec{j} \wedge \vec{B} dt$$

Densité volumique de force de Laplace

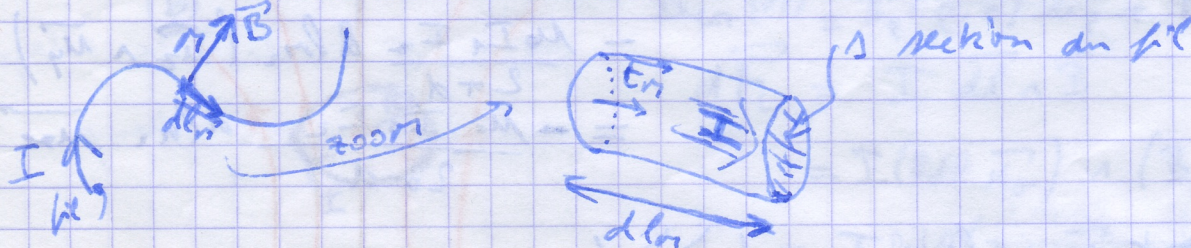
$$\vec{f}_{Lap} = \frac{d\vec{F}_i}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Par un mécanisme hors programme, cette force exercée sur les porteurs mobiles est transmise au matériau conducteur

à la contact: $d\vec{F}_i$ agit sur le volume élémentaire de conducteur dt

2) Force de Laplace sur un conducteur filiforme

a) Force sur 1 élément de conducteur



Volume de l'élément de fil: $dt = dl \cdot S$

Densité volumique de courant: $\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{e}_r$

Force de Laplace: $d\vec{F}_i = \vec{j} \wedge \vec{B} dt = \frac{I}{S} \vec{e}_r \wedge \vec{B} S dl$

$$d\vec{F}_i = I dl \vec{e}_r \wedge \vec{B} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Résultat indépendant du signe choisi

Generalization $d\vec{F}_2 = \vec{j} d\vec{r}_1 \wedge \vec{B} = \vec{j} dS_1 \wedge \vec{B} = I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}$
elt de courant dC

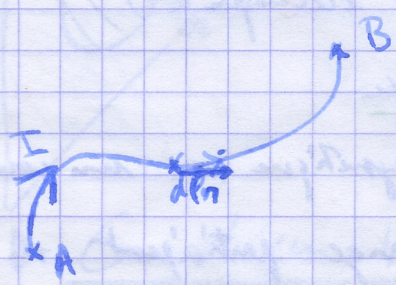
Rappel Loi de Biot et Savart

champ créé en M par dC placé en P:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{M}_{P \rightarrow M}}{r^3}$$

$d\vec{F}_2 = d\vec{C}_2 \wedge \vec{B}$

⑤ AM sur un fil parcouru par I constant



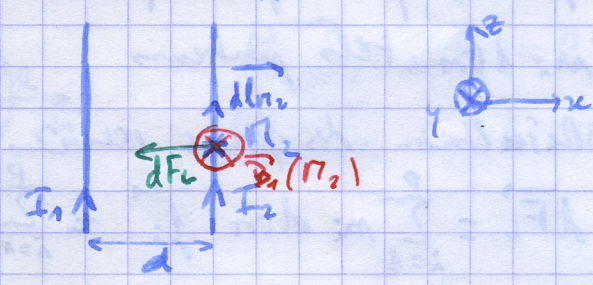
Action de Laplace sur le conducteur AB

$$\vec{F}_L = \int d\vec{F}_L = \int_A^B I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}(M)$$

$$\vec{M}_{O,L} = \int \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = \int_A^B \vec{OM} \wedge (I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}(M))$$

3) Exemple

▶ 2 fils rectilignes infinis //



Chaque fil crée 1 champ magnétique qui agit / l'autre → interagissent entre les 2 courants

Exemple: fil 1 crée en M2 ∈ fil 2 le champ $\vec{B}_1(M_2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u}_y$

Rappel CI fil infini rectiligne

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi p} \vec{u}_\theta$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= d\vec{l}_{M_2} \wedge \vec{B}_1 ; d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{l}_{M_2} \wedge \vec{B}_1(M_2) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} d\vec{l}_{M_2} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} d\vec{l}_{M_2} \vec{u}_x \end{aligned}$$

Les fils ont une longueur $L \gg d$.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int d\vec{l}_{M_2} \vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \vec{u}_x$$

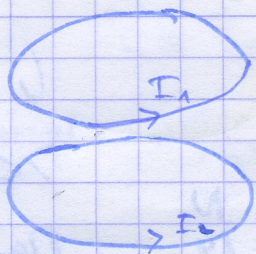
Si on échange les rôles, $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = +\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \vec{u}_x$

→ les 2 actions magnétiques s'opposent

→ action attractive si $I_1, I_2 > 0$, répulsive si $I_1, I_2 < 0$

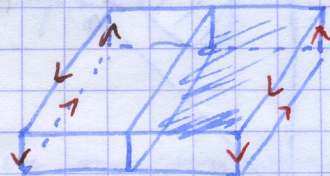
Antenae : des courants // s'attirent mutuellement, des courants anti // se repoussent.

autre ex

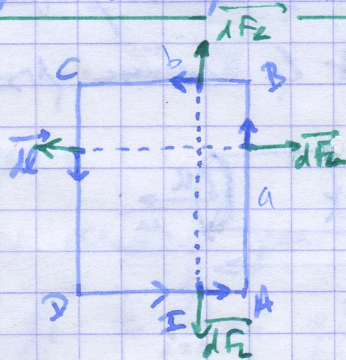
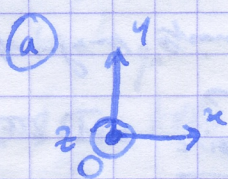


attractive si $I_1 I_2 > 0$

supplément : des un barreau aimanté :



4) Calcul de la force de Laplace sur 2 géométries



$$\vec{B}_{ext} = B(x) \vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

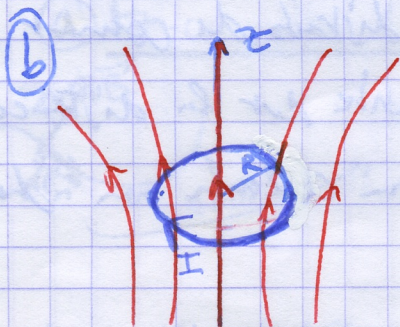
$$\vec{F}_{L,AB} = \int_{y=y_A}^{y=y_B} I (dy \vec{u}_y) \wedge (B(x_A) \vec{u}_z) = I B(x_A) \left(\int_{y=y_A}^{y=y_B} dy \right) \vec{u}_x$$

$$= I B(x_A) (y_B - y_A) \vec{u}_x = I B(x_A) a \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{L,CD} = -I B(x_D) a \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{L,AB} + \vec{F}_{L,CD} = I (B(x_A) - B(x_D)) a \vec{u}_x$$

NB $\vec{F}_{L,AB} = I \vec{AB} \wedge (B(x) \vec{u}_z)$ car \vec{B} uniforme / AB



$$\vec{B}_{ext}(r) = B_\rho(\rho, z) \vec{u}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= I (R d\theta \vec{u}_\theta) \wedge (B_\rho \vec{u}_\rho + B_z \vec{u}_z)$$

$$= I R d\theta (B_\rho \vec{u}_z - B_z \vec{u}_\rho)$$

La somme des $d\vec{F}_L$ / 2 elts diamétralement opposés est suivant \vec{u}_z

conclusion : $\vec{F}_L \parallel \vec{u}_z$

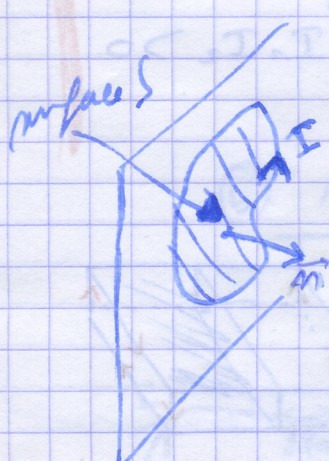
$$F_{Lz} = \int_{\theta=2\pi}^0 -I R d\theta B_\rho(R, z_A) = I R B_\rho(R, z_A) 2\pi$$

II Dipôle magnétique

ÉPIC FAIL

1) Moment magnétique d'un circuit (fermé)

► Cas d'un circuit plan



$$\vec{M} = N I S \vec{m}$$

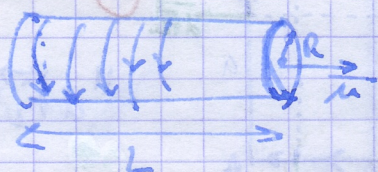
↑ où il y a \$N\$ tours de fil

Le choix arbitraire du sens
 > 0 donne \$\vec{m}\$ normal au plan
 Mais \$\vec{M}\$ ne dépend pas de ce choix.

► Cas d'un bobinage = assemblage de spires quasiment fermées

Son moment magnétique est la somme des moments mag. des \$N\$ spires.

Ex) Solénoïde



$$M_{\text{spire}} = I 2\pi R^2 \vec{m}$$

$$M_{\text{solénoïde}} = n L \cdot I 2\pi R^2 \vec{m}$$

► Cas général

Moment magnétique d'une distribution de courants

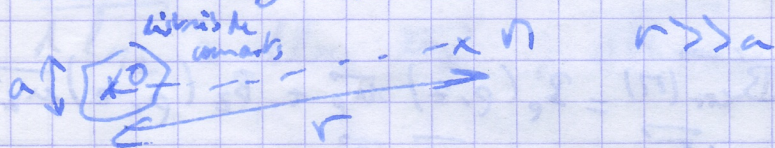
$$\vec{M} = \int_{\text{circuit}} \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{C} = \iiint \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$= \oint \frac{1}{2} \vec{r} \times I d\vec{l}$$

\$\vec{r}\$ pseudo vecteur

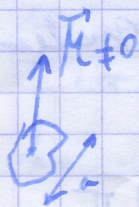
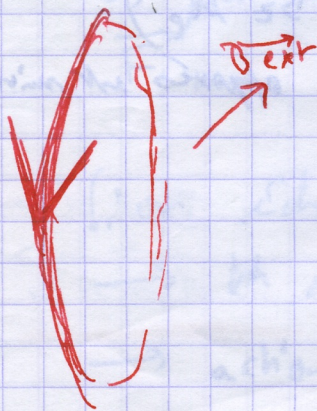
2) Moment de dipôle magnétique

► Dipôle magnétique actif



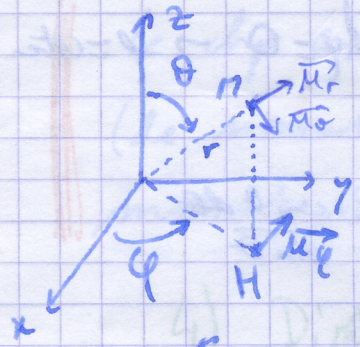
distribu. de courant de taille bien
 petite par la distance à laquelle
 on calcule son champ

► Dipôle mag passif



distribution de courant de taille \$a \ll r\$ par la
 distance caractérisant le champ \$\vec{B}_{\text{ext}}\$
 dans lequel elle est plongée.

3) Dipôle magnétique actif



(a) Potential vectoriel

On admet $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{OM}}{OM^3}$

NB $(M, \vec{m}_r, \vec{m}_\theta)$ plan antisym de $\vec{A}(M) \perp$ à ce plan

Coord sphériques $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(M \cos \theta \vec{m}_r - M \sin \theta \vec{m}_\theta) \wedge (r \vec{m}_r)}{r^3}$
 $= \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{m}_\theta$

ligne champ de \vec{A} : cercle d'axe Oz

(b) Champ magnétique

$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

Or : $\begin{cases} \text{rot}(\vec{M} \wedge \vec{OM}) = 2\vec{M} \\ \text{rot}(f\vec{U}) = \text{grad} f \wedge \vec{U} + f \text{rot} \vec{U} \\ \text{grad}(f(r)) = f'(r) \frac{\vec{OM}}{OM} \end{cases}$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\text{rot} \left(\frac{1}{OM^3} \vec{M} \wedge \vec{OM} \right) \right)$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{3}{OM^4} \frac{\vec{OM}}{OM} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{OM}) + \frac{1}{OM^3} 2\vec{M} \right)$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{3}{OM^5} (OM^2 \vec{M} - (OM \cdot \vec{M}) \vec{OM}) + \frac{2}{OM^3} \vec{M} \right)$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - OM^2 \vec{M}}{OM^5}$

en coordonnées sphériques

$\vec{B} = \text{rot} \left(\frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{m}_\theta \right)$

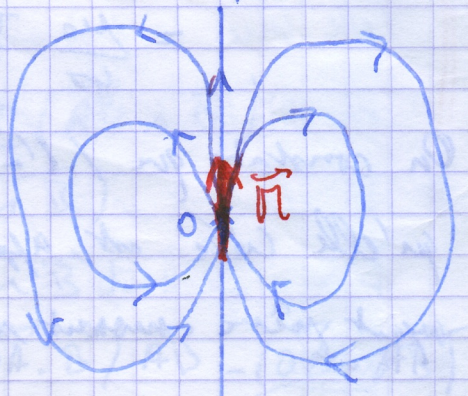


Fig 11

$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \begin{cases} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ \frac{\sin \theta}{r^3} \\ 0 \end{cases}$

► lignes de champ mag

$$d\vec{m} \parallel \vec{B}$$

$$d\vec{m} \begin{cases} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\varphi \end{cases}$$

$$d\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \text{cte}$$

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

$$\frac{dr}{2 \cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\ln r = \ln(\sin^2\theta) + K$$

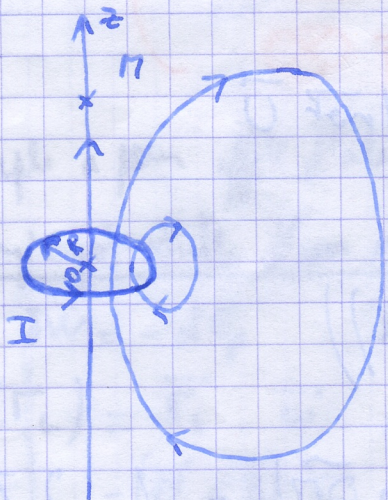
$$r = K' \sin^2\theta$$

cf Fig II

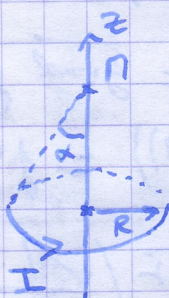
lignes de champ :

- axe des dipôles, orienté vs le sens de \vec{M}
- lignes fermées passant par O, orientées vs le sens de \vec{M}

Comparaison



Chp d'1 spirale (non-axe)



$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha \vec{u}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\text{si } P \in O_2, z \gg R \quad \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{u}_z$$

si on assimile la spirale à 1 dipôle : $\vec{M} = I \pi R^2 \vec{u}_z$

$$\vec{B}_{\text{dip}}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{or})\vec{or} - or^2 \vec{M}}{or^5}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(I \pi R^2 \vec{u}_z \cdot z \vec{u}_z) z \vec{u}_z - z^2 I \pi R^2 \vec{u}_z}{z^5}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi R^2 \cdot 2z^2 \vec{u}_z}{z^5} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{u}_z$$

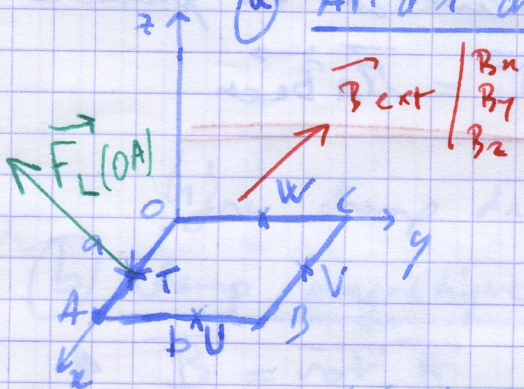
On constate que / l'axe de la spirale, bien de celle-ci, le champ qu'elle crée est approximativement égal au champ d'1 dipôle mag ayant même moment magnétique que la spirale.

Ceci est général :

Le dipôle créé à gde distance par une distribution de courant (de moment mag $\neq \vec{0}$) est \approx un dipôle mag de m moment mag.

4) Dipôle mag parif

(a) AM d'un dipôle mag uniforme sur 1 cadre rectangulaire



► Résultante

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_{\text{cadré}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \vec{OA} \wedge \vec{B} + I \vec{AB} \wedge \vec{B} + \dots \\ &= I (\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO}) \wedge \vec{B} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

L'action de l'ensemble d'un dipôle mag uniforme sur 1 circuit fermé est un couple.

► Moment du couple $\vec{\Gamma}_L = \vec{M}_{O, L}$ par exemple

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O, L}(\vec{OA}) &= \int_0^a \vec{OA} \wedge (I dx \vec{u}_x \wedge \vec{B}) = \int_{x=0}^a (x \vec{u}_x) \wedge (I dx \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_y \\ 0 & B_z \end{vmatrix}) \\ &= \int_{x=0}^a I x dx \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B_z \\ 0 & B_y \end{vmatrix} = \int_{x=0}^a I x dx \begin{vmatrix} 0 \\ -B_y \\ -B_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I a^2 (-B_y \vec{u}_y - B_z \vec{u}_z) \end{aligned}$$

ou bien : la force est uniformément répartie / OA, on obtient le même moment en appliquant la force totale au milieu T de OA

$$\vec{M}_{O, L}(\vec{OA}) = \vec{OT} \wedge (I \vec{OA} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{M}_{O, L}(\vec{AB}) = \vec{OU} \wedge (I \vec{AB} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{M}_{O, L}(\vec{BC}) = \vec{OV} \wedge (I \vec{BC} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{M}_{O, L}(\vec{CO}) = \vec{OW} \wedge (I \vec{CO} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\Gamma}_L = (\vec{OT} - \vec{OV}) I (\vec{OA} \wedge \vec{B}) + (\vec{OU} - \vec{OW}) I (\vec{AB} \wedge \vec{B})$$

$$= \vec{VT} \wedge I (\vec{OA} \wedge \vec{B}) + \vec{WU} \wedge I (\vec{AB} \wedge \vec{B})$$

$$= -\vec{AB} \wedge I (\vec{OA} \wedge \vec{B}) + \vec{OA} \wedge I (\vec{AB} \wedge \vec{B})$$

$$= I [-(\vec{AB} \cdot \vec{B}) \vec{OA} - (\vec{AB} \cdot \vec{OA}) \vec{B} + (\vec{OA} \cdot \vec{B}) \vec{AB} - (\vec{OA} \cdot \vec{AB}) \vec{B}]$$

$$= I (\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \wedge \vec{B} = I (a \vec{u}_1 \wedge b \vec{u}_2) \wedge \vec{B} = (I ab \vec{u}_z) \wedge \vec{B}$$

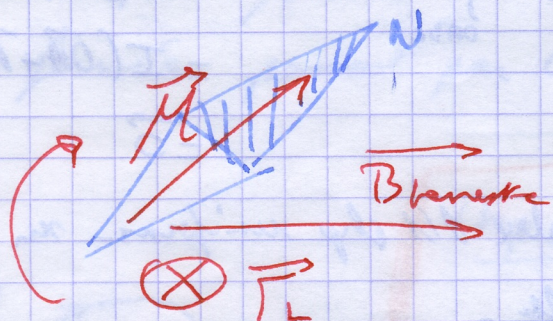
$$\Rightarrow \underline{\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}}$$

(b) Généralisation

- Soit un circuit de forme quel que soit de moment dipolaire $\vec{M} \neq 0$ plongé dans \vec{B}_{ext} dont la distance caractéristique de variation est \gg aux dimensions du circuit.

L'action de Laplace de \vec{B}_{ext} sur ce circuit est en première approximation un couple de moments $\underline{\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}}$

Exemple



Ce couple a pour effet d'aligner \vec{M} sur \vec{B}_{ext} .

(c) Énergie potentielle d'un moment magnétique constant dans un champ extérieur \vec{B}

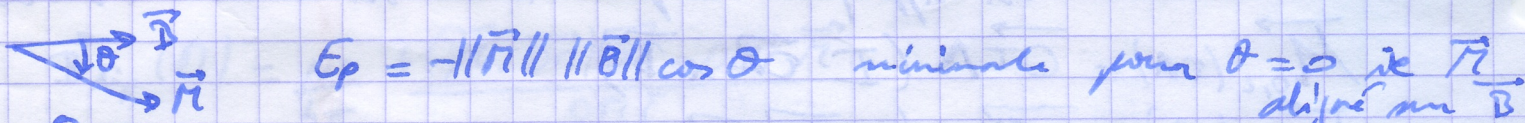
Rappel : $\delta W = -dE_p$ $P = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$; \vec{B} stationnaire

$P(\vec{\Gamma}_L) = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}$ si circuit indéformable

$$= (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\omega} = (\vec{M}, \vec{B}, \vec{\omega}) = +(\vec{B}, \vec{\omega}, \vec{M}) = +\vec{B} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{M})$$

$$= +\vec{B} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d(\vec{B} \cdot \vec{M})}{dt} = +\frac{d(\vec{M} \cdot \vec{B})}{dt}$$

$$\boxed{E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}}$$



(d) Force exercée par un champ magnétique non uniforme sur un dipôle

- Si \vec{B} non uniforme, il existe, en plus du couple $\vec{\Gamma}_L$, une force exercée par \vec{B}/\vec{M} .

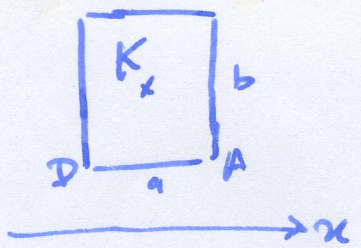
Cette force tend à amener le moment dipolaire \vec{M} , préalablement aligné sur \vec{B} , là où $\|\vec{B}\|$ est le plus intense.

- Si circuit rigide, $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ si $\theta = 0$, $E_p = -\|\vec{M}\| \|\vec{B}\|$ et

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = \|\vec{M}\| \text{grad } \|\vec{B}\|$$

Exemples

- (1) Nettoyant sur l'exemple de I-4-a



$$\vec{F} = I b (B(x_A) - B(x_D)) \vec{u}_x$$

$$B(x_A) - B(x_D) = B(x_K + \frac{a}{2}) - B(x_K - \frac{a}{2})$$

$$\approx a \left. \frac{dB}{dx} \right|_{x_K}$$

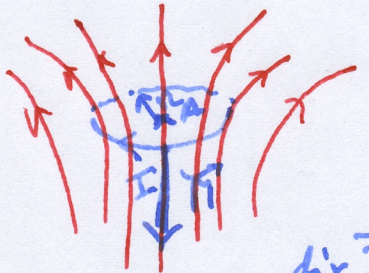
si $a \ll$ distance caract de variation de B

$$\rightarrow \vec{F} \approx I a b \left. \frac{dB}{dx} \right|_{x_K} \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_x \approx M \left. \frac{dB}{dx} \right|_{x_K} \vec{u}_n$$

résultat indep de la forme du circuit

(2) Neveu I-4-5



\vec{M} antiparallèle à \vec{B} donc attiré vers la zone de champ forte \rightarrow vers le haut

On a trouvé : $F_z = 2\pi R I B_p(R, z_A)$

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow B_p \approx -\frac{1}{2} p \frac{\partial B_z}{\partial z}$ pour p petit (cf exo Esbat)

si R petit, $F_z \approx 2\pi R I \left(-\frac{1}{2} R \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{z_A} = -\pi R^2 I \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z_A} = -M \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z_A}$

accès direct à cette formule : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} = +M B_z$

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -M \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{u}_z \text{ et on retrouve}$$

!
 Neveu 2 $\vec{v} \perp \vec{B}$ ne travaille pas
 Laplace $I d\vec{l} \perp \vec{B}$ peut travailler