Algèbre
Chapitre 7

Espaces préhilbertiens réels
Espaces euclidiens

Désormais E $\mathbb{R}$ev I] muni d'1 PS
II] et de $\dim f$

I] Espaces PH réels

E $\mathbb{R}$ev, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ PS, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ PH réel

1) Orthogonalité, norme

On a vu l'inégalité de CS

Prop/Def $N : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$ est une norme sur E dite norme préhilbertienne ou associée au PS

Démo Axiomes de norme

* $N : E \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in E$ $N(x) \geq 0$
* $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$: ✓ car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie
* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ ✓
* inégalité triangulaire $x, y \in E$

$N(x+y)^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

Cauchy Schwarz : $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} = N(x)N(y)$

$\Rightarrow N^2(x+y) \leq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N^2(y) = (N(x)+N(y))^2$

$\Rightarrow N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ Inégalité de Minkowski

Prop Formulaire : $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ PHR

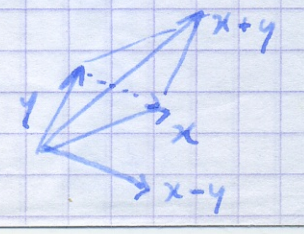
On note $\|\cdot\|$ la norme.

• (1) : $\forall x,y \in E$ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

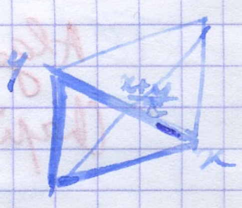
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

(2) Identités de polarisation $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

(3) Identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$



ou Identité de la médiane | $\|x\|^2+\|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$



(b) Orthogonalité

Déf Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ PHR

- $x, y \in E$ sont dits orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$ (noté $x \perp y$)
- $A \subset E$, on note $A^\circ \underset{\perp\text{aire}}{=} A^\perp$ l'OG de A

Prop $A^\perp$ sev de E

$\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$

Th de Pythagore $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

démo cf $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$ et $\langle x,y\rangle = 0$

Déf $B = (e_i)_{i\in I} \in E^I$

B est dite OG si $\forall i,j \in I$, $i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$

B ——— ON si ——— $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

($x \in E$ dit unitaire si $\|x\| = 1$)

Rem/Prop

* **P1** $(e_1, \dots, e_n)$ OG alors $\left\|\sum_{i=1}^n e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$ (Pythagore)

cf $\left\langle \sum_{i=1}^n e_i, \sum_{j=1}^n e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j\rangle$

* une famille OG de vecteurs non nuls est libre

$\sum \lambda_i x_i = 0 = \langle x_j, \sum \lambda_i x_i\rangle = \lambda_j \|x_j\|^2$ ...

(c) Projection orthogonale sur 1 sevdf

intro : MPSI $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euclidien, F sev de E $\quad F \oplus F^\circ = E$

$p_F : \begin{array}{l} x \longmapsto x_F \\ E \longrightarrow E \end{array}$ $\quad x_F \in F$, $x - x_F \in F^\circ$

Th Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ PHR et F sev de dimension finie $r \geq 1$

(1) Pour tout $x \in E$, $\exists ! y \in F \,/\, x - y \in F^\circ$

et on note $p_F : \begin{array}{l} x \mapsto y \\ E \to E \end{array}$

Si de plus $(e_1, \dots, e_r)$ base de F alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x \rangle e_i \quad (*)$$

(2) $p_F \in \mathcal{L}(E)$, $p_F^2 = p_F$, $\mathrm{Im}\, p_F = F$, $\mathrm{Ker}\, p_F = F^\circ$

et $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\circ = F \oplus F^\circ$

(3) $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$

et $d(x, F) = \inf \{ \|x - y\|, y \in F \} = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\circ}(x)\|$

$\|x\|^2 = d^2(x, F) + \|p_F(x)\|^2$

Demo (1) existence $(e_1, \dots, e_r)$ BON de F

$$y = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x \rangle e_i$$

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\langle x - y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \underbrace{\langle y, e_i \rangle}_{\langle x, e_i \rangle} = 0$

par CL, $x - y \perp F$, $z \in F$, $z = \sum_{i=1}^{r} z_i e_i$

$$\langle x - y, z \rangle = \sum_{i=1}^{r} z_i \underbrace{\langle x - y, e_i \rangle}_{0} = 0$$

unicité 2 candidats $y_1, y_2 \in F$

$x - y_1 \in F^\circ$, $x - y_2 \in F^\circ$ $\Rightarrow y_2 - y_1 \in F^\circ \cap F$

$\Rightarrow y_2 - y_1 = 0$

(2) • $p_F \in \mathcal{L}(E)$ cf $(*)$

• $x \in E$, $y = p_F(x) \in F$

$z = p_F(y)$ $z - y \in F^\circ$ $z \in F$ $z = y$ convient, unique

$\Rightarrow p_F^2(x) = p_F(x)$

• $\mathrm{Im}\, p_F \subset F$, rec^t $y \in F$, $p_F(y) = y$ (vu ci dessus)

$\Rightarrow y \in \mathrm{Im}\, p_F \Rightarrow \mathrm{Im}\, p_F = F$

• $\mathrm{Ker}\, p_F$ $x \in E$, $p_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F^\circ \Rightarrow \mathrm{Ker}\, p_F = F^\circ$

On en déduit $E = F \oplus F^\circ$.

(3) Th Pythagore $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\circ}$

orthogonaux

méthode des moindres carrés

$y \in F$, $x - y = \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\circ} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F}$

Pytha $\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|y - p_F(x)\|^2$

minimale pour l'unique $y = p_F(x)$

Conséquence

Csq 1 Si F sevdf alors $E = F \oplus F^\circ$, on peut considérer p_F

et $p_{F^\circ} = id_E - p_F$

Rem si $F \neq df$, il se peut que $E \neq F + F^\circ$ mais on a toujours $F \cap F^\circ = \{0\}$

Csq 2 si F sevdf $F^{\circ\circ} = F$

$\boxed{\supset}$ si $x \in F$, $\forall y \in F^\circ$ $(x|y) = 0$ $\Rightarrow x \in F^{\circ\circ}$ $F \subset F^{\circ\circ}$ | $\boxed{\subset}$ $x \in F^{\circ\circ}$ $x = x_1 + x_2$ $x_1 \in F, x_2 \in F^\circ$ $x_2 = 0$? $x \perp x_2$ $x_1 \perp x_2$ $(x_2|x_2) = (x - x_1|x_2) = (x|x_2) - (x_1|x_2) = 0$ $\|x_2\| = 0$ $x \in F$...

Csq 3 Codim $F^\circ = \dim F$ si E euclidien, $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$

Csq 4 $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ (p_F est 1-lipschitzienne)

Csq 5 Inégalité de Bessel

prop Si $(e_1, \dots, e_r)$ famille orthonormale de E, alors $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2$

demo en effet si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$

$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x) e_i$ et $\|p_F(x)\|^2 = \sum (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2$

Csq 6 Calculs pratiques

détermination de $p_F(x)$ ou de $d(x, F)$

(*) $p_F(x)$ caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\circ$

(**) Utiliser $\underset{(e_1, \dots, e_r)}{\text{BON}}$ de F, alors $p_F(x) = \sum (e_i|x) e_i$

Pythagore

(2)

• $d^2(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|p_{F^\circ}(x)\|^2$

•• $\|p_F(x)\|^2 = \sum (x|e_i)^2$ si $(e_1, \dots, e_r)$ BON F

<u>Csq 7</u> Comme $E = F \oplus F^\circ$ on peut aussi considérer

s_F, s_{F° symétries orthogonales p/r à F, F°

$s_F = p_F - p_{F^\circ} = 2p_F - id_E$

$s_{F^\circ} = p_{F^\circ} - p_F = id_E - 2p_F$

<u>Cas</u> où F ou F° hyperplan : si $F = \mathbb{R}v$, v unitaire

$p_F(x) = \langle x, v\rangle v$

Si E euclidien, $\mathcal{B}$ BON, $\left.\begin{array}{l} P = Mat_{\mathcal{B}}(p_F) \\ V = Mat_{\mathcal{B}}(v) \end{array}\right\}$ alors $P = V\,{}^tV$

<u>Démo</u> $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ $M_{\mathcal{B}}(p_F(x)) = ?X$

$p_F(x) = X^t V V = V\,{}^tV X$

<u>Exemples</u> $\boxed{Ex\,1}$ $\mathbb{R}^3$ ps can $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$

$u = (1,1,0)$ $d(u,F)$? $Mat_{can}(p_F)$?

$F^\circ = \mathbb{R}v$, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ car $\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) = \langle X, v\rangle$

$X \in F \Leftrightarrow X \perp v$

$p_{F^\circ}(u) = \langle u, v\rangle v = \frac{2}{\sqrt{3}} v$

$d(u,F) = \|p_{F^\circ}(u)\| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$p_{F^\circ} : X \mapsto \langle X, v\rangle v$ X vect base can

$$P = M_{can}(p_{F^\circ}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

alors $M_{can}(p_F) = I_3 - P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\boxed{Ex\,2}$ $\inf\left\{ \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2\,dt \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$?

<u>Interpolation</u> $E = \mathbb{R}_2[X]$

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ \qquad \|P\|^2 = \int_{-1}^{1} P^2$$

on cherche $I = \inf\left\{ \|X^2 - (aX+b)\|^2 / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = d^2(X^2, \underbrace{\mathbb{R}_1[X]}_{F})$

$= \|X^2 - p_F(X^2)\|$ avec $p_F(X^2) = \alpha X + \beta$

caractérisé par $X^2 - (\alpha X + \beta) \perp 1, X$

$$\begin{cases} \langle X^2 - \alpha X - \beta, 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - \alpha X - \beta, X\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1} (t^2 - \alpha t - \beta)\,dt = 0 \\ \int_{-1}^{1} (t^3 - \alpha t^2 - \beta t)\,dt = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - 2\beta = 0 \\ -\frac{2\alpha}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \underline{\underline{\frac{8}{45}}}$$

II) Espaces euclidiens (opérateurs)

1/ Prop générales

notions déjà connues : – PS, CS / Norme

– existence de BON

– Schmidt

– PO

<u>Prop</u> (dualité) $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien

Alors $\phi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto (y \overset{\varphi_x}{\longmapsto} (x|y)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme (d'ev)

<u>démo</u> ϕ linéaire ... $\dim E = \dim E^*$

ϕ injective : $x \in E$, $\varphi_x = 0$ $\varphi_x(x) = 0 = \|x\|^2$

$\Rightarrow x = 0$ $\ker \phi = \{0\}$ ∎

$\boxed{\text{Csq : th de représentation}}$

$\forall \varphi \in E^*,\ \exists ! x \in E,\ \varphi = \varphi_x : x \mapsto (x|y)$

rem si B BON $B = (b_1, \dots, b_n)$ $y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$

$\varphi(y) = \sum a_i y_i = (x|y)$ où $x = \sum a_i b_i$

ex ds $\mathbb{R}^3$ $Y = (x, y, z)$

$\varphi(Y) = x + y + z = (X|Y)$ où $X = (1, 1, 1)$

2) Adjoint

$\boxed{\text{Prop / Def}}$ $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists ! u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq

$\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|u^*(y))$

u^* est l'adjoint de u

Si B est 1 BON de E, $M_B(u^*) = {}^t(M_B(u))$

démo existence B BON

$x : X$ ds B $M = M_B(u)$

$y : Y$

$(u(x)|y) = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tM\,Y$ u^* tq $M_B(u^*) = {}^tM$

$= (x|u^*(y))$

unicité 2 candidats v_1, v_2, par différence on a

$\forall x, y \in E$ $(x|v_1(y) - v_2(y)) = 0$ $\Rightarrow v_1(y) - v_2(y) \in E^\circ = \{0\}$

$\boxed{\text{Prop}}$ $\boxed{P_1}$ $\begin{array}{l} u \mapsto u^* \\ \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \end{array}$ est un automorphisme involutif du

Mev $\mathcal{L}(E)$.

$\forall u \in \mathcal{L}(E)\ /\ u^{**} = u$

$\boxed{P_2}$ $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)$ $(uv)^* = v^* u^*$

démo immédiat avec $\mathcal{B}$ BON

P3 $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^*$, $\chi_u = \chi_{u^*}$, $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} u^*$,

$\det u = \det u^*$, $sp(u) = sp(u^*)$

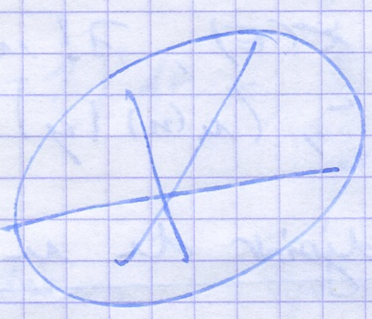
démo $\mathcal{B}$ BON, $M = M_{\mathcal{B}}(u)$, ${}^tM = M_{\mathcal{B}}(u^*)$

et on conclut _

P4 $u \in \mathcal{L}(E)$ (1) $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

(2) Si F sev de E stable par u, alors $F^\perp$ stable par u^*

démo ...



Def $u \in \mathcal{L}(E)$

(1) u est dit orthogonal si $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$

i.e. $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$

(2) u symétrique ou auto adjoint si $u^* = u$

(3) u antisym si $u^* = -u$

Résultat essentiel (th spectral pr les endos sym)

Th (1) E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, alors u est dgz i.e. E est la somme directe orthogonale des sev propres de u, et il existe une BON de E formée de vep de u

(2) $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O(n)$ (i.e. $-$ inversible, $-\ {}^tPP = I_n$) tq ${}^tPAP$ diagonale _

X

DEMO

(1) ▸ $\mathrm{Ker}\, u^* \subset (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^*$

$y \in \mathrm{Im}\, u$ ie $\exists z \in E, y = u(z)$

$$(x|y) = (x|u(z)) = (\underbrace{u^*(x)}_{0}|z) = 0$$

▸ $\mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u$

$\dim(\mathrm{Ker}\, u^*) = n - \mathrm{rg}\, u^* = n - \mathrm{rg}\, u$

$= \dim (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

$\Rightarrow$ inclusion + égalité dim $\Big|$ $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

▸ $u^{**} = u$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u^*)^* = (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp$

$\Rightarrow (\mathrm{Ker}\, u)^\perp = \mathrm{Im}\, u^*$ □

(2) $y \in F^\perp$, mq $u^*(y) \in F^\perp$

$z \in F$, $(u^*(y)|z) = (\underbrace{y}_{F^\perp}|\underbrace{u(z)}_{F}) = 0$ donc $\forall y \in F^\perp$, $u^*(y) \in F^\perp$

Démo du th spectral

(1) Lemme | • Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$

•• Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U} \to$ cpx de module 1

∴ Si $A \in A_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$

démo • $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ vep ass / $AX = \lambda X$; $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$

considérer $^t\bar{X} A X = \begin{cases} {}^t\bar{X}(AX) = \lambda\, {}^t\bar{X} X = \lambda \underbrace{\sum |x_i|^2}_{\in \mathbb{R}_+^*} \\ ({}^t\bar{X}A)X = \bar{\lambda}({}^t\bar{X})X \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

∴ $\bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$

•• ${}^tAA = I_n$ X vep, considérons :

${}^t\bar{X}X = {}^t\bar{X}({}^tAA)X = |\lambda|^2\, {}^t\bar{X}X \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{U}$

[C10] χ_A est $\mathbb{R}$-scindé

$u \in \mathcal{L}(E)$ sym

$\exists$ BON de E $\quad A = M_B(u) \quad \chi_A = \chi_u$ scindé ds $\mathbb{R}[X]$

(2) $\lambda, \mu \in Sp(u)$, $\lambda \neq \mu$ $\Big|$ $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

$\Big| x \in E_\lambda(u)$, $y \in E_\mu(u)$ $\quad (u(x) \mid y) = \begin{cases} \lambda\,(x \mid y) \\ \xrightarrow{u \text{ sym}} (x \mid u(y)) = \mu\,(x \mid y) \end{cases}$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)(x \mid y) = 0 \Rightarrow \underline{(x \mid y) = 0}$

$\boxed{[5q]}$ $F = \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

(3) $\underline{\text{Mq } F = E}$

~~supposons~~ $F \neq E$ alors $F^\perp \neq E^\perp = \{0\}$

F est u-stable : $x \in F$, $\exists x_\lambda \in E_\lambda(u)$ pr $\lambda \in Sp(u)$

$x = \sum x_\lambda \quad u(x) = \sum u(x_\lambda) = \underbrace{\sum \lambda x_\lambda}_{\in E_\lambda(u)} \in F$

donc F° est u^*-stable or $\underline{u^* = u}$ (u sym)

$v \in \mathcal{L}(F^\circ)$ induit par u $\quad \chi_v \mid \chi_u$

et $d^\circ \chi_v = \dim F^\circ \geq 1 \quad \chi_v$ scindé ds $\mathbb{R}[X]$

donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \chi_v(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ vap de v

et $\operatorname{Ker}(v - \alpha\, id_{F^\circ}) \neq \{0\}$

$\exists x \in F^\circ$, $x \neq 0$, $v(x) = \alpha x$, $u(x) = \alpha x$ $\quad$ x vep pour u, $x \in F \cap F^\circ = \{0\}$, $x = 0$ absurde

donc $\underline{F = E}$

donc $\underline{u \text{ dgz}}$

(4) $Sp(u) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$

$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$

On prend 1 BON $(e_{j,1}, \ldots, e_{j,m_j})$ de $E_{\lambda_j}(u)$

et $B = (\underbrace{e_{1,1}, \ldots, e_{1,m_1}}_{\text{BON de } E_{\lambda_1}(u)}, \ldots, \underbrace{e_{p,1}, \ldots, e_{p,m_p}}_{\text{BON de } E_{\lambda_p}(u)})$ BON de E $\square$

(5) traduction matricielle

On part de $A \in S_n(\mathbb{R})$, on considère $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$

muni du ps can $(X|Y) = {}^tXY$

$u : X \longmapsto AX$

$\mathcal{B}$ base can $=$ BON

$Mat_{\mathcal{B}}(u) = A$

$M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA = A \Rightarrow u^* = u \Rightarrow u \in \mathcal{L}(E)$ sym

(1) s'applique et il existe $\mathcal{B}$ BON de E formée de vcp pour u ou A

$P = Pass(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ mat de pass de BON à BON

ie ${}^tPP = I_n \Leftrightarrow P \in O_n(\mathbb{R})$

${}^tPAP = Mat(u, \mathcal{B}) = D$ diagonale

Autres propriétés

Remarques (1) Cas d'1 projection orthogonale

E euclidien, F sev de E

p_F projection orthogonale sur F

alors $p_F^* = p_F$ en effet :

$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\circ}$ $\quad$ $\mathrm{Im}\, p_F = F$, $\mathrm{Ker}\, p_F = F^{\circ}$

$\exists \mathcal{B}$ BON adaptée à $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\circ}$ $\quad$ $r = \dim F$

$$M_{\mathcal{B}}(p_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in S_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow p_F^* = p_F$$

Prop E euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$ alors

p PO $\Longleftrightarrow p^* = p$

Dém $\Longrightarrow$ plus haut

$\Longleftarrow$ $\mathrm{Im}\, p^* = (\mathrm{Ker}\, p)^\perp$ (et $\mathrm{Ker}\, p^* = (\mathrm{Im}\, p)^\perp$)

$p^* = p \Rightarrow \mathrm{Im}\, p = (\mathrm{Ker}\, p)^\perp$ d'où p PO □

② $u \in \mathcal{S}(E)$ (endo sym de E) u dgz

décomposition spectrale : $u = \sum \lambda p_\lambda$

où p_λ projection ~~sur~~ $E_\lambda(u)$ $//^t$ à $\sum_{\mu \neq \lambda} E_\mu(u) = (E_\lambda(u))^\circ$

$\Rightarrow$ p_λ projection orthogonale

3) Endomorphismes orthogonaux

E euclidien, $O(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^* u = id_E\}$

Prop Caractérisation

E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :

(1) $u \in O(E)$ ie $u^* \circ u = u \circ u^* = id_E$

(2) u conserve le PS ie $\forall x, y \in E$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$

(3) u ——— norme $\forall x \in E$ $\|u(x)\| = \|x\|$

(4) Pour toute (resp une) base $\mathcal{B}$ ON de E, $u(\mathcal{B})$ BON

(5) ——— et $P = Mat_{\mathcal{B}}(u)$,

$^tPP = I_n$

démo (1) $\Rightarrow$ (2) $(u(x)|u(y)) = (x|u^*u(y)) = (x|y)$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall x, y$ $(x|\underbrace{(u^*u - id_E)(y)}_{z \in E^\circ \text{ donc } z = 0}) = 0$

(3) $\Rightarrow$ (2) par polarisation

(3) $\Rightarrow$ (4) $(u(b_i)|u(b_j)) = (b_i|b_j) = \delta_{ij}$

(4) $\Rightarrow$ (2) $(u(x)|u(y)) = \sum x_i y_j (u(b_i)|u(b_j)) = (x|y)$

$\boxed{Ex}$ F sev de E $E = F^\circ \oplus F$ s_F : sym OG % à F

ie $s_F : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$, alors $s_F \in O(E)$: plusieurs méthodes
$\begin{cases} x_1 \in F \\ x_2 \in F^\circ \end{cases}$

① $s_F^2 = id_E$ et $s_F^* = s_F$: $s_F = 2p_F - id_E$, $s_F^* = 2p_F^* - id_E^* = s_F$

$\exists$ BON adaptée à $E = F \oplus F^\circ$, $r = \dim F$ $M_{\mathcal{B}}(s_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$

symétrique

$\begin{cases} x_1, y_1 \in F \\ x_2, y_2 \in F^\circ \end{cases}$ ② $\langle s_F(x), s_F(y) \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, y \rangle$

Def si F HP, s_F réflexion p/r à F

Rem u unitaire dirigeant F° $p_{F^\circ} : x \mapsto \langle x, u\rangle u$

$s_F(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$

Rem si F est de dim $n-2$, s_F est dit retournement p/r à F

Propriétés | E euclidien

(P1) $O(E)$ sous groupe de $GL(E)$, = groupe orthogonal de E

Démo • $O(E) \subset GL(E)$

• $id_E \in O(E)$

• $u, v \in O(E)$, $u \circ v \in O(E)$ cf $(u\circ v)^* = v^* \circ u^* = v^{-1} \circ u^{-1}$ $= (u \circ v)^{-1}$

• $u \in O(E)$ $u^{-1} = u^* \in O(E)$, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1} = u$

(P2) si $u \in O(E)$ alors $\det u = \pm 1$

Démo $u \circ u^* = id_E$ $\det u \cdot \underbrace{\det u^*}_{\det u} = 1$

$\Rightarrow (\det u)^2 = 1$ □

$u \mapsto \det u$ morphisme de groupes $(O(E), \circ)$ ds $(\{-1,1\}, \times)$
$O(E) \to \{-1,1\}$

Considérons son noyau $SO(E)$:

Def/Prop ODQ $u \in O(E)$ rotation de E si $\det u = 1$

On note $SO(E) = \{u \in O(E) / \det u = 1\}$

$SO(E)$ SG de $(O(E), \circ)$ (groupe spécial OG de E)

NB $u \in SO(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in O(E) \\ \text{et } \det u = 1 \end{cases}$

(b) **Matrices OG**

Critère $u \in \mathcal{L}(E)$, B BON $M = M_B(u)$

$u \in O(E) \Leftrightarrow {}^tMM = M{}^tM = I_n$

Def/Prop On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble

$\{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = M{}^tM = I_n\}$

$M \in M_n(\mathbb{R})$ dite OG si ${}^tMM = M{}^tM = I_n$

(NB dès que ${}^tMM = I_n \Rightarrow \det M \neq 0$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ ie ${}^tM = M^{-1}$)

(P'1) $O_n(\mathbb{R})$ SG de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

D2/P2 $SO_n(\mathbb{R}) = O^+(n) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = 1\}$

c'est 1 SG de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$

ⓒ Orientation • E $\mathbb{R}$-evdf

relation sur l'ensemble des bases de E :

B, B' ont même orientation ssi $\det_B(B') > 0$

$\det(\mathrm{Pass}(B,B'))$

2 classes B_0 base de référence

B_1 qcq $\det_{B_0}(B_1) > 0$ ou $\det_{B_0}(B_1) < 0$

Orienter E : choisir B_0 de référence

→ bases | directes : celles de même orientation que B_0
| indirectes : — d'orientation contraire à B_0

•• B_0 est prise ON, B_1 BON

$P = \mathrm{Pass}(B_0, B_1) = M_{B_0}(u)$ avec $\left| \begin{array}{l} u(B_0) = B_1 \\ u \in O(E) \end{array}\right.$

$\det u = \det_{B_0}(B_1) \in \{-1, 1\}$

si B_0 BOND, B_1 BOND ssi $u \in SO(E)$

ⓓ Autres propriétés

Lemme $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$

démo $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ vep ass

$MX = \lambda X$, ${}^t\bar{X}X = {}^t\bar{X}\,{}^tM\,M\,X = |\lambda|^2\,\underbrace{{}^t\bar{X}X}_{>0} \Rightarrow |\lambda| = 1$

Csq E euclidien, $u \in O(E)$ $sp(u) \subset \{-1, 1\}$

cf B BON de E $M = M_B(u)$, $M \in O_n(\mathbb{R})$

$\chi_u = \chi_M$ $sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, \chi_M(\lambda) = 0\} \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$

Rem F sev de E $u = s_F$ $u \neq id_E$ $sp(u) = \{-1, 1\}$

alors u dgz

Réciproquement, si u dgz, $u \in O(E)$ u sym OG $\left\{ \begin{array}{l} u^2 = id_E \\ u = u^* = u^{-1} \end{array}\right.$

Prop E euclidien, $u \in O(E)$ soit F sev de E u-stable

alors $u(F) = F$ et F° stable par u

Démo • $u(F) \subset F$ mais $u \in GL(E) \xrightarrow{\text{conserve la dimension}} \dim u(F) = \dim F$

$\Rightarrow \underline{u(F) = F}$

• F u-stable $\Rightarrow F^\circ$ u^*-stable or $u^* = u^{-1}$

$\Rightarrow u^{-1}(F^\circ) \subset F^\circ$ et égal (idem)

$\Rightarrow u^{-1}(F^\circ) = F^\circ$ ie $F^\circ = u(F^\circ)$ $\square$

4) Rappels en dimension 2, 3

E euclidien de dim $n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{n=1}$ $\begin{cases} O(E) = \{-id_E, id_E\} \\ SO(E) = \{id_E\} \end{cases}$

$\boxed{n=2}$ $O_2(\mathbb{R})$, $SO_2(\mathbb{R})$?

$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \Big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 / a^2+b^2 = 1, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$

(cf $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq ${}^tMM = I_2$)

$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 / a^2+b^2 = 1 \right\}$

Prop $R : \begin{vmatrix} \theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \mathbb{R} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R}) \end{vmatrix}$ est 1 morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$

$\operatorname{Ker} R = 2\pi\mathbb{Z}$

$SO_2(\mathbb{R})$ commutatif (abélien)

cf $\forall \theta, \varphi$ $R(\theta) \times R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$

E plan euclidien $(SO(E), \circ)$ groupe commutatif

Etant donné $u \in SO(E)$, $\forall$ Bon $\mathcal{B}$,

$\exists \theta \in \mathbb{R} / M_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$

NB $\operatorname{tr} u = 2\cos\theta$

Si E orienté, pour toute B BOND, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ 17

$M_B(r) = R(\theta)$ indep de B

$B = (e_1, e_2)$ $M_B(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$r(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 = u_\theta$ (cf φ : u_r)

$r(e_2) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$

$\sin\theta = \det_B(e_1, r(e_1)) = [e_1, r(e_1)]$ produit mixte

CCQ $r \in SO(E)$. θ : mesure de l'angle de la rotation r

tq $\forall$ BOND $M_B(r) = R(\theta)$

$u \in O^-(E)$ B BON $M_B(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in O_2^-(\mathbb{R})$ $(a^2+b^2=1)$

$\rightarrow$ symétrique

$F = \ker(u - id_E)$ de dim $\begin{cases} 0 \rightarrow u = -id_E,\ u \in SO(E) \\ 1 \\ 2 \rightarrow u = id_E,\ u \in SO(E) \end{cases}$

$\Rightarrow$ u réflexion

droite invariante : $D : (a-1)x + by = 0$

Rem usage des transformations cpx associées

$B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ BOND de E

$v = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \mapsto z_v = x + iy$

$E \longrightarrow \mathbb{C}$

$u \in O(E)$, $u(v) = v'$, $z' = az$ ($SO(E)$) ou $z' = a\bar{z}$ ($O^-(E)$) $|a| = 1$

$a = e^{i\theta}$

$\Rightarrow u = r_\theta$

D droite de la réflexion

tq $z' = z$

$z = a\bar{z}$ $|z| = 1$, $\bar{z} = 1/z$

$z^2 = a$, $a = e^{i\theta}$

$\Rightarrow z = \pm e^{i\theta/2}$

$\boxed{n=3}$ $O_3(\mathbb{R})$ non explicite ⑤

$\boxed{SO(E)}$ $u \in SO(E)$? $\mathcal{B}$ BON ($M = M_\mathcal{B}(u)$)

vap de M ds $\mathbb{C}$, $d^o \chi_m = 3$, $\chi_m \in \mathbb{R}[X]$

2 cas ① { 1 seule racine réelle α ; 2 racines cpx conjuguées $\beta, \overline{\beta}$ }

② 3 racines réelles α, β, γ ds $\{-1, 1\}$

cas ② • $\alpha = \beta = \gamma = 1$ $\quad$ $u = id_E$
($\det M = 1$)

• $\alpha = \beta \neq \gamma$ $\quad$ $\det M = \alpha\beta\gamma = 1 = \alpha^2 \gamma$

$\Rightarrow \gamma = 1, \alpha = -1$ $\Rightarrow$ u = symétrie orthogonale % à $F = \ker(u - id_E)$

u dgz, $\mathcal{E}$ BON adaptée
à $E = F \oplus F^\circ$

$$M_\mathcal{E}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R(\pi) \end{array}\right)$$

cas ① $\det M = 1 = \alpha |\beta|^2 \Rightarrow \alpha = 1$ vap simple

$\Rightarrow F = \ker(u - id_E)$ de dim 1

F u-stable et F° aussi

$\tilde{u} \in \mathcal{L}(F)$ induit par u $\quad$ F° muni du ps induit

$\tilde{u} \in SO(F)$

$\mathcal{E}$ BON de F°, $\exists \theta \in \mathbb{R} / M_\mathcal{E}(\tilde{u}) = R(\theta)$
(indep de $\mathcal{E}$ BOND)

Prop E euclidien de dim 3, $u \in SO(E) \setminus \{id_E\}$
Alors $\exists 1$ BON $\mathcal{B}$ de E et $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M_\mathcal{B}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

si de plus E orienté, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ indep de $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
BOND

$\vec{i}$ unitaire dirigeant $\Delta = \ker(u - id_E)$ axe de la rotation ; θ mesure de l'angle de la rotation ($u = \mathrm{Rot}_{(\Delta, \theta)}$)

Détermination pratique

▶ $u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad u \in SO(E)$!!

$\rightarrow u \in O(E)$ et $\det u = 1$

si $u = id_E$, ça va - ...

si $u \neq id_E$, axe, angle ?

$\Delta = \mathrm{Ker}(u - id_E)$ de dim 1

choisir $\vec{\imath}$ unitaire dirigeant Δ

$\cos\theta$: grâce à $\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta + 1$

$\sin\theta$ lié au pb d'orientation :

(MPSI) $\vec{v} \in \Delta^\circ$, $\vec{v} \neq 0$

$\sin\theta$ du signe de $\det(\vec{\imath}, \vec{v}, u(\vec{v}))$

idem tant que $\vec{v} \notin \Delta$

autre méthode $\quad E$ euclidien orienté de dim 3

On a l'usage $\quad$ - ps $(\cdot|\cdot)$

- produit mixte (det) $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$

$[x_1, x_2, x_3] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$

où $\mathcal{B}$ BOND qcq

- produit vectoriel

2 définitions équivalentes

$x, y \in E \quad z \mapsto [x, y, z]$ forme linéaire (représentable)

$x \wedge y =$ unique elt de E tq $\varphi(z) = (x \wedge y) \cdot z$

Def 1 $\quad x, y \in E \quad x \wedge y \in E$ tq $\forall z \in E$, $[x, y, z] = (x \wedge y) \cdot z$

Csq $\quad \mathcal{B}$ BOND $\quad \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ $\quad \vec{v} \wedge \vec{v}'$ = pseudo det

$\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ $\quad \vec{v}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ $\quad \begin{vmatrix} \vec{\imath} & x & x' \\ \vec{\jmath} & y & y' \\ \vec{k} & z & z' \end{vmatrix}$

Synthèse pour $\wedge$: $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ ...

Def 2 (géom) $\vec{v}, \vec{v}' \in E$

▶ $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{0}$ si $(\vec{v}, \vec{v}')$ liée

▶ $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\| \sin\theta\, \vec{w}$ où $(\vec{v}, \vec{v}', \vec{w})$ directe, $\vec{w}$ unitaire

$\vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{v}')^\circ$, $\quad (\vec{u}, \vec{\jmath}, \vec{w})$ BOND de E

$\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

NB $\vec{v} \cdot \vec{v'} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{v'}\| \cos\theta$

$\vec{v} \wedge \vec{v'} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{v'}\| \sin\theta \, \vec{w}$

$\mathcal{L}(E)$ a 2 sev : $S(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, u^* = u\}$

$AS(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, u^* = -u\}$

E euclidien de dimension n

B BON, $u \mapsto M_B(u)$ isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ isomorphisme entre $\left| \begin{array}{l} S(E) \text{ et } S_n(\mathbb{R}) \\ AS(E) \text{ et } A_n(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dim S(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim AS(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2} \end{array} \right.$

$\boxed{\text{si } n = 3}$ $\dim A_3(\mathbb{R}) = 3$ $\dim AS(E) = 3$

$\vec{w} \in E$ $\varphi_{\vec{w}} \in AS(E)$?

$\varphi_{\vec{w}} : \left| \begin{array}{l} \vec{v} \mapsto \vec{w} \wedge \vec{v} \\ E \to E \end{array} \right.$ alors $\varphi_{\vec{w}} \in AS(E)$

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ BOND

$\vec{w} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ $\varphi_{\vec{w}}(\vec{i}) = (p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \wedge \vec{i} = r\vec{j} - q\vec{k}$

$\varphi_{\vec{w}} \in \mathcal{L}(E)$ $\varphi_{\vec{w}}(\vec{j}) = \_\_\_\_ \vec{j} = -r\vec{i} + p\vec{k}$

$\varphi_{\vec{w}}(\vec{k}) = \_\_\_\_ \vec{k} = q\vec{i} - p\vec{j}$

$M_B(\varphi_{\vec{w}}) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ antisym

$\longrightarrow \varphi_{\vec{w}}^* = -\varphi_{\vec{w}}$

règle de [illegible]

CQ **Prop** E euclidien de dim 3 orienté

$\left| \begin{array}{l} \vec{w} \mapsto \varphi_{\vec{w}} \\ E \to AS(E) \end{array} \right.$ isomorphisme

Démo • AL trivial

• injective $\vec{w} \neq \vec{0}$ $\left| \begin{array}{l} \operatorname{Ker} \varphi_{\vec{w}} = \mathbb{R}\vec{w} \quad \varphi_{\vec{w}} \neq 0 \\ \operatorname{Im} \varphi_{\vec{w}} = (\mathbb{R}\vec{w})^\circ \end{array} \right.$

bijective $\dim E = \dim AS(E) = 3$

CQ : $u \in SO(E) \setminus \{id_E\}$ $\mathcal{B} = (\vec{n}, \vec{j}, \vec{k})$ BOND

$\Delta = \ker(u - id_E) = \mathbb{R}\vec{n}$

$M_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{AS}(E)$

$f = \frac{f + f^*}{2} + \frac{f - f^*}{2}$

$u = s + a$

$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ $s = p_\Delta + \cos\theta \, p_{\Delta^\circ} = (1-\cos\theta) p_\Delta + \cos\theta \, id_E$

où $p_\Delta : \vec{v} \longmapsto (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$

$M_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathcal{AS}(E)$ $\exists! \vec{\omega} \in E$

$a = \varphi_{\vec{\omega}} : \vec{v} \longmapsto \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

où $\vec{\omega} = \sin\theta \, \vec{n}$ (règle de Sarrus)

CQ si on connait $u \in SO(E)$ par $M_{\mathcal{B}}(u)$ $\mathcal{B}$ BOND $= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$\rightarrow \cos\theta$ grâce à $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$

$\rightarrow M_{\mathcal{B}}(a) = \frac{A - {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ $\sin\theta \, \vec{n} = p\vec{e_1} + q\vec{e_2} + r\vec{e_3}$

<u>si non nul</u> : $\left|\begin{matrix}\vec{n} \text{ en normalisant} \\ \sin\theta\end{matrix}\right.$

<u>si $\sin\theta = 0$</u> $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ $\rightarrow u = id_E$!

$\rightarrow u = A_\Delta = \operatorname{Rot}(\Delta, \pi)$

$\boxed{Ex}$ $E = \mathbb{R}^3$ ps can, $\mathcal{B}$ base can OND $= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$u \in \mathcal{L}(E)$ tq $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ nature de u, élts carac ?

A matrice de permutation $\longrightarrow$ orthogonale car

$u(\mathcal{B}) = (\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_1})$ BOND $u \in SO(E)$
car $\det u = 1$

Soit $a = \frac{u - u^*}{2}$, $M_{\mathcal{B}}(a) = \frac{A - {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$a = \varphi_{\vec{\omega}} : \vec{v} \longmapsto \vec{\omega} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})$

⑥

OSCQ $\exists$ B BOND tq $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$M_B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \sin\theta \, \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tr} A = 0 = 1 + 2\cos\theta \Longrightarrow \theta = + \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$\boxed{O^-(E)}$ $u \in O^-(E)$ alors $-u \in SO(E)$

dim $E = 3$ impair

▶ $-u = id_E \Rightarrow u = -id_E$

▶ $-u = Rot_{(\Delta,\theta)} \Rightarrow u = -Rot_{\Delta,\theta} = \sigma \circ r$

où $\left| \begin{array}{l} r \text{ rotation d'axe } \Delta \\ \sigma \text{ réflexion \% à } \Delta^\circ \end{array} \right.$

$\exists$ BON $\mathcal{B}$ de réduction $M_{\mathcal{B}}(-u) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R(\theta)} \\ 0 & & \end{array} \right)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{-R(\theta)} \\ 0 & & \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{M_{\mathcal{B}}(\sigma)} \times \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R(\theta+\pi)} \\ 0 & & \end{array} \right)}_{M_{\mathcal{B}}(r)}$$

Rem ① $u, v \in SO(E)$ m axes alors $u \circ v = v \circ u$

② recherche de sev stables (cf prop)

III Etude des formes quadratiques de l'espace euclidien

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien

1) Association

$\boxed{\text{Prop}}$ $\begin{array}{l} u \xrightarrow{\Phi_1} q_u : (x \mapsto (u(x)|x)) \\ S(E) \to Q(E) \end{array}$ isomorphisme,

de même pour $\begin{array}{l} u \xrightarrow{\Phi_2} B_u : (x,y) \mapsto (u(x)|y) \\ S(E) \to BS(E) \end{array}$

Démo Soit $u \in S(E)$ $\quad B_u : \begin{array}{l} (x,y) \mapsto (u(x)|y) \\ E^2 \to \mathbb{R} \end{array}$

Alors B_u forme bilinéaire (...)

$u \in \mathcal{S}(E)$ ie $u^* = u$

$B_u(y,x) = (u(y)|x) = (y|u^*(x)) = (y|u(x)) = B_u(x,y)$

et $q_u(x) = B_u(x,x)$

Correspondances linéaires bijectives :

Si $\mathcal{B}$ BON de E, $M_\mathcal{B}(q_u) = M_\mathcal{B}(B_u) = M_\mathcal{B}(u)$
dans $S_n(\mathbb{R})$

$B_u(e_i, e_j) = (u(e_i), e_j) = a_{ji} = a_{ij}$

$\left(u(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k\right)$

Φ_1 et Φ_2 bijectives : $\left|\begin{array}{ll} q \in Q(E) & M_\mathcal{B}(q) = M \\ B \in BS(E) & M_\mathcal{B}(B) = M \end{array}\right| \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(E) \\ \text{tq } M_\mathcal{B}(u) = M \end{array}$

$\mathcal{B}$ BON

$\boxed{\text{Th}}$ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien et $q \in Q(E)$ ou $B \in BS(E)$ ass.
Alors il existe 1 base de E orthonormale pr $(\cdot|\cdot)$ et q-orthogonale (la mat de q est diag ds cette base)
(th de réduction simultanée)

démo $q \in Q(E)$, $u \in \mathcal{S}(E)$ unique tq $q = q_u$
il existe 1 BON $\mathcal{B}$ de E propre pour u

$$M_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{(\text{th sp})} = M_\mathcal{B}(q)$$

NB dans $\mathcal{B}$, q va être réduite en carrés ie :

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$; $q(x) = q_u(x) = (u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

2) Endos positifs, définis positifs

Définition Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$

ODR u est positif si $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ est positive
ie $\forall x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$

ODR u est DP si q_u est DP ie

$\forall x \in E$ $\left\{\begin{array}{l} (u(x)|x) \geq 0 \\ (u(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right.$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp $\mathcal{S}^{++}(E)$) leur ensemble

Prop E euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$. On a équivalence entre

(1) $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ie $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$

(2) $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$

(3) $\exists v \in \mathcal{L}(E), u = v^* \circ v$

(4) $\exists v \in \mathcal{S}(E), u = v^2$

et équivalence entre

(1) $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$

(2) $sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

(3) $\exists v \in GL(E) / u = v^* \circ v$

(4) $\exists v \in \mathcal{S}(E) \cap GL(E), u = v^2$

Démo ① (1) ⇒ (2) $\lambda \in Sp(u)$, x vep associé

$q_u(x) = (u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{>0} \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

(2) ⇒ (4) ⇒ (3) th spectral $u = \sum \lambda p_\lambda$

$v = \sum \sqrt{\lambda}\, p_\lambda \in \mathcal{S}(E)$, $v^* = v$

$v^2 = u \Rightarrow (4)$ et v convient pour (3)

(3) ⇒ (1) $x \in E$, $q_u(x) = (u(x)|x) = (v^* \circ v(x)|x)$

$= \|v(x)\|^2 \geq 0$ $\square$

② (1) ⇒ (2) idem avec $q_u(x) = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0} > 0$

(2) ⇒ (4) ⇒ (3) idem avec $v \in GL(E) \cap \mathcal{S}(E)$

$Sp(v) = \{\sqrt{\lambda} / \lambda \in Sp(u)\} \not\ni 0$

(3) ⇒ (1) $x \neq 0$, $v \in GL(E)$, $v(x) \neq 0$ $\quad q_u(x) = \|v(x)\|^2 > 0$

Version matricielle pour $S_n^+(\mathbb{R})$ ou $S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}$ BON $M_\mathcal{B}(u) = M_\mathcal{B}(q_u) = M_\mathcal{B}(B_u) = A$, $q_u(X) = {}^tXAX$

$A \in S_n(\mathbb{R})$
- $\to B_A : (X,Y) \mapsto {}^tXAY$
- $\to Q_A : X \mapsto {}^tXAX$
- $\to M_A : X \mapsto AX$

NB $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien $\mathcal{B}$ base can $M_\mathcal{B}(u_A) = A = M_\mathcal{B}(Q_A)$ ps can $u_A \in \mathcal{S}(E)$

Th | Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

On a équivalence entre

(1) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ie $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0$

(2) $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$

(3) $\exists B \in S_n(\mathbb{R})\ ,\ A = B^2$

(4) $\exists P \in M_n(\mathbb{R})\ ,\ A = {}^tPP$

On a équivalence entre

(1) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

(2) $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

(3) $\exists B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})\ ,\ A = B^2$

(4) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})\ ,\ A = {}^tPP$

Complément unicité racine carrée

Prop | (1) E euclidien, $u \in S^+(E)$, $\exists! v \in S^+(E) \ / \ u = v^2$

(2) $\forall A \in S_n^+(\mathbb{R})\ \exists! B \in S_n^+(\mathbb{R}) \ / \ A = B^2$

démo (1) existence $u \in S^+(E)$ décompo spectrale $S = Sp(u)$

$u = \sum_{\lambda \in S} \lambda p_\lambda$ on définit $v = \sum_{\lambda \in S} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda$ $\rightarrow v^* = v$, $\rightarrow Sp(v) = \{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in Sp(u)\} \subset \mathbb{R}_+$

ie $S = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$

$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$

γ BON adaptée

$$M_\gamma(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix},\quad M_\gamma(v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_p} I_{m_p} \end{pmatrix}$$

unicité v commute avec u $\quad u \circ v = v \circ u$

donc v stabilise les $E_\lambda(u)$

$v_\lambda \in \mathcal{L}(E_\lambda(u))$ induit par v, v_λ dgz

$v_\lambda^2 = u_\lambda = \lambda\, id_{E_\lambda(u)} \Rightarrow X^2 - \lambda \in Ann(v_\lambda)$

Or $Sp(v) \subset \mathbb{R}_+ \cap \{z \in \mathbb{R} \ / \ z^2 - \lambda = 0\} = \{\sqrt{\lambda}\}$

Rem Bon à savoir

$$\left| \begin{array}{l} A \longmapsto A^2 \\ S_n^+(\mathbb{R}) \to S_n^+(\mathbb{R}) \end{array} \right. \text{ bijective}$$

3) Applications

ⓐ Version matricielle du th de réduction simultanée

$\boxed{\text{Th}}$ $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien, $q \in Q(E)$, $B \in BS(E)$ ass

Alors il existe 1 base $\mathcal{E}$ de E orthonormale pour $(\cdot|\cdot)$ et q-orthogonale

En pratique: $\mathcal{D}$ BON de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(q) \in S_n(\mathbb{R})$

$P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $\underbrace{{}^tPAP}_{M_{\mathcal{E}}(q)} = D$ diag

$\mathcal{E}$ tq $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$

alors $\mathcal{E}$ BON car $P \in O_n(\mathbb{R})$

Csq (utile) $\boxed{\text{Prop}}$ Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$

alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale

tq $\left| \begin{array}{l} A = {}^tPP \\ B = {}^tPDP \end{array} \right.$

NB On utilise $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni non pas du ps can

mais $B_A : \begin{array}{l} (X, Y) \longmapsto {}^tXAY \\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$ (E, B_A) euclidien.

$\longrightarrow$ à $B \in S_n(\mathbb{R})$ on associe $Q_B : X \longmapsto {}^tXBX$

Q_A fq de l'espace euclidien (E, B_A)

(th) $\exists$ base $\mathcal{D}$ de E tq $\left| \begin{array}{l} \text{orthonormale pour } B_A \\ Q_A \text{ orthogonale} \end{array} \right.$

par ailleurs $\mathcal{E}$ can de E $M_{\mathcal{E}}(B_A) = B$

$M_{\mathcal{E}}(Q_A) = A$ et $M_{\mathcal{D}}(Q_A) = I_n$

$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q_A) = {}^tP I_n P = {}^tPP \\ B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(Q_B) = {}^tPDP \end{array} \right.$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_i = Q_B(d_i)$

Ex $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ mq $\det(A+B) \geq \det A + \det B$

1er cas $\det A = \det B = 0$

$A+B \in S_n^+(\mathbb{R})$ cf $\begin{cases} {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B \in S_n(\mathbb{R}) \\ {}^tX(A+B)X = \underbrace{{}^tXAX}_{\geq 0} + \underbrace{{}^tXBX}_{\geq 0} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \det(A+B) \geq 0$

2e cas par exemple $\det A \neq 0 \Rightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tPP$, $B = {}^tPDP$

$\Rightarrow A+B = {}^tP(I_n + D)P$

$\Rightarrow \det(A+B) = \det^2 P \det(I_n + D)$

$\Rightarrow$ mq $\det(I_n + D) \geq 1 + \det D$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \_\_\_, \lambda_n)$

$\rightarrow$ mq $\prod(\lambda_i + 1) \geq 1 + \prod \lambda_i$ récurrence sur n

$n=1$ ✓

$n>1$ $\left(\prod(\lambda_i+1)\right)(\lambda_n+1) \geq \left(\prod \lambda_i + 1\right)(\lambda_n + 1)$

$\geq 1 + \prod \lambda_i$ ✓

$\det(A+B) \geq \det^2 P(1 + \det D)$

$\geq \det({}^tPP) + \det({}^tPDP)$

$\geq \det A + \det B$

b Optimisation

minimisation | de fq ou endo sym
maximisation |

1 Endo sym

E euclidien $\| u \in S(E)$
$q = q_u$ associée

▶ encadrement de Rayleigh E euclidien $u \in S(E)$

$\lambda_{min} = \operatorname{Min}(Sp(u))$, $\lambda_{max} = \operatorname{Max}(Sp(u))$ alors $\forall x \in E$:

$\lambda_{min}\|x\|^2 \leq q_u(x) \leq \lambda_{max}\|x\|^2$

démo $u \in S(E)$

Th spectral $\exists$ base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ ON propre pour u

$u(e_i) = \lambda_i e_i$ $\quad$ (ie $M_{\mathcal{E}}(u) = M_{\mathcal{E}}(q_u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$)

$x \in E$ décomposé en $\quad x = \sum x_i e_i$

$\Rightarrow u(x) = \sum x_i \lambda_i e_i$

$q_u(x) = (u(x) | x) = \sum \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_{max} \underbrace{\sum x_i^2}_{\|x\|^2}$

et $\sum \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{min} \sum x_i^2$

$\boxed{\text{CSQ}}$ $\quad x \in E \setminus \{0\}$

soit $r_u(x) = \dfrac{q_u(x)}{\|x\|^2} \Rightarrow \lambda_{min} \leq r_u(x) \leq \lambda_{max}$

<u>valeurs atteintes</u> si $\lambda_{max} = \lambda_j$, $r_u(e_j) = \lambda_j$

Rem $\{ r_u(x) / x \in E, \|x\| = 1 \} = [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$

ranger les ~~vaps~~ $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

$[\lambda_1, \lambda_2]$ $\quad x = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \quad \theta \in [0, \pi/2]$

$f(\theta) = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$ $\quad$ à étudier

prop analogue pour $A \in S_n(\mathbb{R})$

$Q_A(X) = {}^tX A X$, $\lambda_{min} \|X\|^2 \leq Q_A(X) \leq \lambda_{max} \|X\|^2$