

MP 08/09 – Corrigé du D.M. de Physique n°10

Problème 1

$$A) 1) \rho(P) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

2) * Symétrie sphérique, donc $V_0(M) = V_0(r)$ et $\vec{E}_0(M) = -\frac{dV_0}{dr} \vec{u}_r = E_0(r) \vec{u}_r$.

* Théorème de Gauss appliqué à la sphère \mathcal{S} de centre O et rayon r :

$$\Phi_E = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \oiint_{\mathcal{S}} E_0(r) dS = 4\pi r^2 E_0(r)$$

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} Q & \text{si } r > R \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = Q \frac{r^3}{R^3} & \text{si } r < R \end{cases}$$

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \\ \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \text{si } r < R \end{cases}$$

$$\vec{E}_0(M) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} & \text{si } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} & \text{si } r < R \end{cases}$$

* Le champ est continu en $r=R$, car il n'y a pas de charges surfaciques

$$3) a) \underline{w_{el}(M) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(M)}$$

$$\begin{aligned} b) W_{el, \text{int}} &= \iiint_{M \in (S)} w_{el}(M) d\tau_M = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} dr r d\theta r \sin\theta d\varphi \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \left(\int_{r=0}^R r^4 dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \right) \times 2\pi \\ &= \frac{Q^2}{40\pi \epsilon_0 R} \end{aligned}$$

$$c) W_{el, \text{ext}} = \iiint_{M \in \mathbb{R}^3(S)} w_{el}(M) d\tau_M = \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} dr r d\theta r \sin\theta d\varphi$$

$$W_{el,ext} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \left(\int_{r=R}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) \cdot 2\pi$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$d) W_{el} = W_{el,int} + W_{el,ext} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

$$B) 1) \vec{j}(P,t) = \rho \vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3} v \vec{u}_z \quad \text{si } P \text{ à l'intérieur de } (S) \text{ à } t$$

$$2) \text{ Maxwell - Gauss : } \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \text{si } r < R \end{cases}$$

$$\text{Maxwell - Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E}(M,t) = - \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell - flux : } \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0$$

$$\text{Maxwell - Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B}(M,t) = \begin{cases} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} & \text{si } r > R \\ \frac{3\mu_0 Q}{4\pi R^3} \vec{u}_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} & \text{si } r < R \end{cases}$$

$$3) \vec{E}(M,t) = - \operatorname{grad} V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(M,t) = \operatorname{rot} \vec{A}(M,t)$$

4) a) Les valeurs de ρ et \vec{j} en P à $t - \frac{PM}{c}$ donnent les valeurs des potentiels en M à t . Le retard $\tau = \frac{PM}{c}$ correspond à une propagation de P à M à la vitesse c .

$$b) \vec{j}(P,t) = \rho(P,t) \vec{v} \quad \text{donc} \quad \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times 4\pi\epsilon_0 V(M,t) \vec{v}$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 V(M,t) \vec{v}$$

$$= \frac{1}{c^2} V(M,t) \vec{v}$$

$$c) \vec{E} = -\text{grad } V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}$$

$$= -\text{grad } V(M,t) - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial V(M,t)}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}(M,t) = \text{rot} \left(\frac{\vec{v}}{c^2} V(M,t) \right)$$

$$= V(M,t) \underbrace{\text{rot} \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \right)}_{=\vec{0}} + \text{grad } V(M,t) \wedge \frac{\vec{v}}{c^2}$$

$$= \text{grad } V(M,t) \wedge \frac{\vec{v}}{c^2}$$

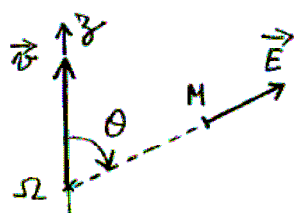
$$d) \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge (-\text{grad } V) - \underbrace{\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}_{=\vec{0}} = \vec{B}$$

$$\text{donc } \vec{B}(M,t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(M,t)$$

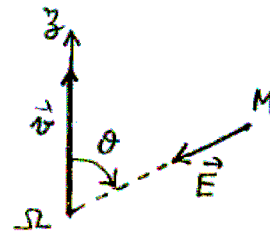
$$5) a) w_m(M,t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M,t)$$

$$b) w_m(M,t) = \frac{1}{2\mu_0} \left\| \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(M,t) \right\|^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^4} \|\vec{E}(M,t)\|^2 \sin^2 \alpha$$

où α est l'angle entre \vec{v} et \vec{E} :



si $Q > 0$, $\alpha = \theta$



si $Q < 0$, $\alpha = \theta + \pi$

Dans les deux cas : $\sin^2 \alpha = \sin^2 \theta$.

$$\text{Donc : } w_m(M,t) = \frac{v^2}{2\mu_0 c^4} \|\vec{E}(M,t)\|^2 \sin^2 \theta = \frac{\epsilon_0 v^2}{2 c^2} \|\vec{E}(M,t)\|^2 \sin^2 \theta$$

$$c) W_m = \iiint_{\mathbb{R}^3} w_m(M,t) d\tau_M = \frac{v^2}{c^2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M,t)\|^2 \sin^2 \theta d\tau_M$$

$$= \frac{v^2}{c^2} \left(\int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(r) r^2 dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \right) \times 2\pi$$

En comparant ce calcul à ceux que l'on a fait en A.3) b) et c) on constate que:

$$W_m = \frac{v^2}{c^2} W_{el} \frac{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{v^2}{c^2} W_{el} \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} W_{el}$$

6) a) $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)$

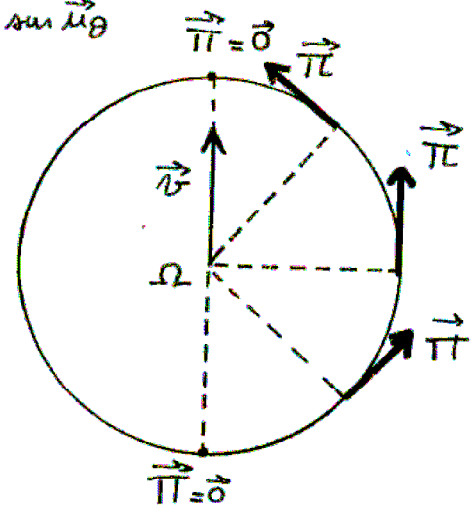
b) $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon^2} \left(E^2 \vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{E} \right)$

c) $E^2 \vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{E} = E^2 \left(\vec{v} - \underbrace{(\vec{u}_r \cdot \vec{v}) \vec{u}_r}_{\text{projet de } \vec{v} \text{ sur } \vec{u}_r} \right)$

projet de \vec{v} sur \vec{u}_θ

$$\vec{\Pi} = \epsilon_0 E^2(M,t) (\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta$$

Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une sphère centrée sur Ω est nul.



7) 1) $m_e c^2 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 c^2 m_e} = \frac{3\mu_0 e^2}{20\pi m_e} = 1,69 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

2) $\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{4}{3} R_1 = 2,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

2^{ème} problème Electrostatique

$$5.1) \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

5.2) Si on néglige les effets de bord, le potentiel et le champ électrostatiques dans le condensateur sont de la forme : $V(M) = V(z)$ et $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z = E(z)\vec{u}_z$.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit en tout point à l'intérieur du condensateur (en dehors des plaques) : $\text{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$ soit $\frac{dE}{dz} = 0$ d'où $E(z) = C$, constante.

En appliquant le théorème de Coulomb à la surface de l'armature 1 on trouve : $\lim_{z \rightarrow 0^+} E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Il vient donc : $C = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ et $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$.

$$5.3) U = V(0) - V(e) = \int_0^e E(z) dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e.$$

$$5.4) \text{ Par définition : } C = \frac{Q}{U} ; \text{ il vient : } C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

$$5.5) \text{ On montre en électrocinétique que : } W_p = \frac{1}{2} CU^2 ; \text{ on en déduit } W_p = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (Ee)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 eS.$$

La densité volumique d'énergie électrostatique est : $u_e = \frac{W_p}{Se} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Charge du condensateur

A-Champ électrique

$$6.1) \text{ Loi des mailles : } U_0 = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} ; \text{ or } i(t) = \frac{dQ}{dt}, \text{ il vient donc : } RC \frac{dQ}{dt} + Q(t) = CU_0.$$

Solution de cette équation différentielle, vérifiant $Q(0) = 0$: $Q(t) = CU_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$ avec $\tau = RC$.

6.2) Ci-contre : $Q(t)/CU_0$ en fonction de t/τ . τ est le temps caractéristique de la charge du condensateur.

6.3) Energie W_1 fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t = \infty$:

- la puissance instantanée qu'il fournit est :

$$\mathcal{P}_{gen} = U_0 i(t) = U_0 \frac{dQ}{dt} = \frac{CU_0^2}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

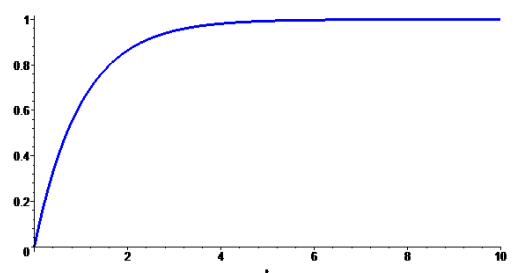
- donc :

$$W_1 = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{gen} dt = \int_0^{\infty} \frac{CU_0^2}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \left[-CU_0^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{\infty} = CU_0^2.$$

$$\text{Energie } W_2 \text{ emmagasinée par le condensateur entre } t = 0 \text{ et } t = \infty : W_2 = \frac{Q^2(\infty)}{2C} - \frac{Q^2(0)}{2C} = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

Energie W_3 dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t = \infty$:

$$W_3 = \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \int_0^{\infty} R \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{\infty} R \frac{C^2 U_0^2}{\tau^2} \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) dt = \left[-\frac{RC^2 U_0^2}{2\tau^2} \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{\infty} = \frac{RC^2 U_0^2}{2\tau^2} = \frac{1}{2} CU_0^2.$$



$$6.4) \sigma(t) = \frac{Q(t)}{S} = \frac{CU_0}{S} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = \frac{\epsilon_0 U_0}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ et } \vec{E}(M, t) = \frac{U_0}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \vec{u}_z.$$

B-Courant de déplacement

6.5) En un point M situé dans l'espace entre les armatures du condensateur la densité volumique de courant est nulle et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \vec{0} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) = \mu_0 \underbrace{\left(\epsilon_0 \frac{U_0}{\tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_z \right)}_{=\vec{j}_D(M, t)}$$

6.6) Sous forme intégrale, cette équation s'écrit, pour tout contour fermé orienté Γ délimitant une surface S situés entièrement à l'intérieur du condensateur :

$$\mathcal{C}_B(\Gamma, t) = 0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E(\mathcal{S}, t)}{dt} = \mu_0 \Phi_{j_D}(\mathcal{S}, t)$$

Elle est formellement identique au théorème d'Ampère de la magnétostatique (voir 6.8 ci-dessous), en remplaçant l'intensité du courant vrai, par l'intensité d'un courant fictif, le « courant de déplacement » égal au flux de la densité de courant de déplacement \vec{j}_D .

C-Magnétostatique

6.7) Pour tout point M , le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie ; le champ magnétique étant un pseudo-vecteur, on en déduit que $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan, soit porté par \vec{u}_θ ; $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par translation parallèlement à Oz et par rotation autour de Oz , donc $B(r, \theta, z)$ ne dépend en fait ni de z ni de θ . Finalement : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$.

6.8) Le théorème d'Ampère de la magnétostatique s'écrit, pour tout contour fermé orienté Γ délimitant une surface \mathcal{S} situés entièrement à l'intérieur du condensateur :

$$\mathcal{C}_B(\Gamma) = \mu_0 I(\mathcal{S}) = \mu_0 \Phi_j(\mathcal{S}),$$

où $I(\mathcal{S})$ est l'intensité traversant la surface orientée \mathcal{S} , égale au flux de la densité volumique de courant $\vec{j}(M)$. Prenons pour \mathcal{C} un cercle d'axe Oz et de rayon $r < a$, orienté dans le sens direct autour de Oz , et \mathcal{S} le disque délimité par ce cercle. On a alors :

$$\mathcal{C}_B(\Gamma) = \oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_M = \oint_{M \in \Gamma} B(r) \cdot dl_M = 2\pi r B(r)$$

et

$$I(\mathcal{S}) = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M) \cdot \overrightarrow{dS}_M = (j \vec{u}_z) \cdot (\pi r^2 \vec{u}_z) = \pi r^2 j.$$

Il vient donc : $B(r) = \frac{1}{2} \mu_0 j r$ pour $r < a$.

D-Champ magnétique

6.9) Revenons au condensateur et étudions les symétries. Pour tout point M , le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie ; le champ magnétique étant un pseudo-vecteur, on en déduit que $\vec{B}(M, t)$ est perpendiculaire à ce plan, soit porté par \vec{u}_θ : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$. Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz , donc $B(r, \theta, z, t)$ ne dépend en fait pas de θ . Finalement :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, z, t) \vec{u}_\theta.$$

Appliquons le théorème d'Ampère généralisé (question 6.6) en prenant pour \mathcal{C} le cercle d'axe Oz , de rayon $r < a$ dans le plan de cote z (orienté dans le sens direct autour de Oz), et pour \mathcal{S} le disque délimité par ce cercle. On a alors :

$$\mathcal{C}_B(\Gamma, t) = \oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl}_M = \oint_{M \in \Gamma} B(r, z, t) \cdot dl_M = 2\pi r B(r, z, t)$$

et

$$\Phi_{j_D}(\mathcal{S}, t) = \iint_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{j_D}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS_M} = \left(\varepsilon_0 \frac{U_0}{\tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \overrightarrow{u_z} \right) \cdot (\pi r^2 \overrightarrow{u_z}) = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{U_0}{\tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Il vient : $B(r, z, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{U_0}{\tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) r$ pour $r < a$ (ce résultat ne dépend pas de z mais la symétrie ne permettait pas de le prévoir).

$$\text{Finalement : } \overrightarrow{B}(M, t) = \frac{U_0}{2c^2 \tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) r \overrightarrow{u_\theta}.$$

E- Puissance rayonnée

6.10) $\overrightarrow{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{E}(M, t) \wedge \overrightarrow{B}(M, t)$ est le vecteur courant d'énergie électromagnétique.

6.11) En $r = a$,

$$\overrightarrow{\Pi}(r = a, t) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{U_0}{e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \overrightarrow{u_z} \right) \wedge \left(\frac{U_0}{2c^2 \tau e} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) a \overrightarrow{u_\theta} \right) = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2\tau e^2} \left[\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \overrightarrow{u_r}.$$

6.12) La puissance électromagnétique $\mathcal{P}_{\text{sortant}}$ sortant de l'espace entre les armatures est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant l'espace entre les armatures (cylindre \mathcal{C} d'axe Oz et de rayon a et hauteur e) orientée vers l'extérieur soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{sortant}} &= \iint_{M \in \mathcal{C}} \overrightarrow{\Pi}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS_M} = \iint_{M \in \mathcal{C}} \left(\frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2\tau e^2} \left[\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \overrightarrow{u_r} \right) \cdot (dS_M \overrightarrow{u_r}) \\ &= \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2\tau e^2} \left[\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \underbrace{\iint_{M \in \mathcal{C}} dS_M}_{=2\pi a e} = \frac{\pi \varepsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau e} \left[\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \end{aligned}$$

6.13) L'énergie électromagnétique *entrée* dans le condensateur entre $t = 0$ et $t = \infty$ est :

$$\begin{aligned} W_{EM} &= - \int_{t=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\text{sortant}} dt = \frac{\pi \varepsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau e} \int_{t=0}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) \right) dt \\ &= \frac{\pi \varepsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau e} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\tau}{2} \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{\infty} = \frac{\pi \varepsilon_0 U_0^2 a^2}{2e} = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_2 \end{aligned}$$

On retrouve l'énergie emmagasinée calculée à la question 6.3.

Condensateur en régime sinusoïdal permanent

7.1) Dans l'espace entre les armatures, $\overrightarrow{E}(M, t) = \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\varepsilon_0 \pi a^2} \overrightarrow{u_z}$

7.2) La symétrie est la même qu'à la question 6.8.

Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit $\mathcal{C}_B(\Gamma, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E(\mathcal{S}, t)}{dt}$ avec, pour le même contour et la

même surface qu'à la question 6.8 : $2\pi r B(r, z, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\varepsilon_0 \pi a^2} \pi r^2 \right)$. D'où :

$$\overrightarrow{B}(M, t) = - \frac{\mu_0 Q_0 \omega \sin(\omega t) r}{2\pi a^2} \overrightarrow{u_\theta}.$$

7.3) $u_{em} = u_e + u_m$ avec $u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ et $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

7.4) $u_e = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega t)}{2\varepsilon_0 \pi^2 a^4}$ et $\langle u_e \rangle = \frac{Q_0^2}{4\varepsilon_0 \pi^2 a^4}$; $u_m = \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) r^2}{8\pi^2 a^4}$ et $\langle u_m \rangle = \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^2 r^2}{16\pi^2 a^4}$.

$$\text{Ainsi : } \frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 r^2}{4} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}.$$

7.5) Si $a/c \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} \leq \frac{\omega^2 a^2}{4c^2} \ll 4\pi^2$ soit $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} \ll 1$ et on peut négliger la densité volumique moyenne d'énergie magnétique devant la densité volumique moyenne d'énergie électrique.

Pour $a = 3\text{cm}$, cela impose : $T \gg \frac{3 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^8} = 10^{-6} \text{ s}$ soit $f = \frac{1}{T} \ll 10^6 \text{ Hz}$.

Dans les montages usuels de travaux pratiques, la condition $a/c \ll T$ est largement vérifiée. La durée a/c est le délai de propagation d'une onde électromagnétique sur une distance a . L'approximation envisagée est l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

3^{ème} problème

I.1) Le système est linéaire si quand on additionne deux signaux à l'entrée les signaux de sortie s'additionnent aussi et quand on multiplie le signal d'entrée par une constante le signal de sortie est multiplié par la même constante.

I.2.a) Tout signal périodique $f(t)$ de période T peut s'écrire comme somme d'un signal constante et de signaux sinusoïdaux de périodes $T, T/2, \dots, T/n, \dots$: $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi t}{T} + \varphi_n\right)$. Le spectre de $f(t)$ est la donnée des amplitudes A_n des composantes sinusoïdales que l'on représente en fonction de leurs fréquences $nf = \frac{n}{T}$.

I.2.b) Les fréquences présentes dans le spectre de $s(t)$ existent toutes dans le spectre de $e(t)$ donc le système 1 est linéaire. Il coupe les hautes fréquences, c'est un filtre passe-bas.

I.2.c) De même, le système 2 est linéaire et c'est un filtre passe-bande. Le système 3 n'est pas linéaire car il apparaît dans le spectre de $s(t)$ des fréquences absentes du spectre de $e(t)$.

II.1.a) Puisque l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire : $V_B = V_+ = 0$

Théorème de Millman en A et en B :

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega\underline{S} + jC_1\omega\underline{V_B}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega} = \frac{\frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega\underline{S}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega} \quad \text{et} \quad 0 = \underline{V_B} = \frac{\frac{\underline{S}}{2R_1} + jC_1\omega\underline{V_A}}{\frac{2}{R_1} + jC_1\omega}.$$

II.1.b) En utilisant les équations précédentes :

$$\underline{V_A} = -\frac{\underline{S}}{2jR_1C_1\omega} = \frac{\frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega\underline{S}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega} \Rightarrow \underline{T}(\omega) = \frac{-1}{1 + jR_1C_1\omega + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{2jC_1\omega}}$$

II.1.c) Par identification des deux formules : $\frac{Q}{\omega_0} = R_1C_1$ et $Q\omega_0 = \frac{1}{R_eC_1} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_eC_1}}$ et $Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_e}}$.

Numériquement : $R_e = 493,4 \Omega$, $Q = 20,1$.

II.1.d) $C_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_e}f_0} = \begin{cases} 16 \text{ nF} & \text{pour } f_0 = 1\text{kHz} \\ 534 \text{ pF} & \text{pour } f_0 = 30\text{kHz} \end{cases}$.

II.2.a) $T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ est clairement maximal lorsque $\omega = \omega_0$.

II.2.b) Les pulsations de coupure à -3dB sont définies par $T(\omega_c) = \frac{T(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Soit : } \frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} = \pm \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \omega_c^2 \mp \frac{1}{Q} \omega_0 \omega_c - \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right).$$

Il y a donc 2 pulsations de coupure (les deux solutions positives) :

$$\omega_{c1} = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \quad \text{et} \quad \omega_{c2} = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right).$$

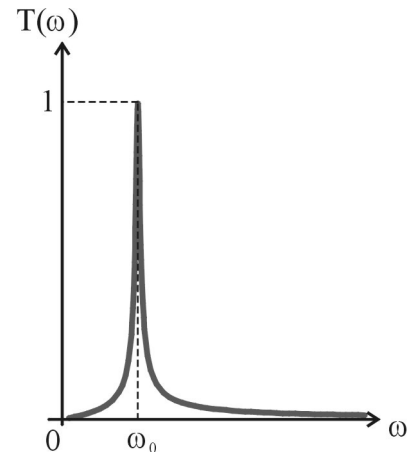
La largeur de la bande passante en fréquence est :

$$B_\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

II.2.c) $Q = \frac{\omega_0}{B_\omega}$. Le facteur de qualité Q indique la sélectivité du filtre :

plus Q est grand plus le filtre est sélectif.

II.2.d) Cf. figure ci-contre.



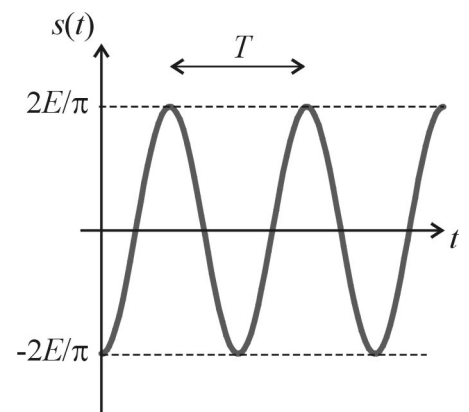
II.3.a) Le signal est une fonction paire, c'est pourquoi son développement en série de Fourier ne comporte que des termes en cosinus. Le premier terme est la composante continue (moyenne temporelle) : $a = \langle e(t) \rangle = \frac{E}{2}$.

II.3.b) La pulsation centrale du filtre est la fréquence du fondamental : $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi f$. La largeur de la bande passante

$$B_\omega \approx \frac{2\pi f_0}{20} = \frac{2\pi f}{20}$$

est nettement inférieure à la distance entre deux harmoniques qui est $4\pi f$ (puisqu'il n'y a que des harmoniques de rang impair). Ainsi, on peut dire que le filtre transmet uniquement le fondamental. Etant donné que $T(\omega_0) = -1$: le signal de sortie est égal à l'opposé du fondamental du signal d'entrée (figure ci-contre) :

$$s(t) \approx -\frac{2E}{\pi} \cos(2\pi ft).$$



II.3.c) En divisant la valeur de C_1 successivement par 3, 5, 7, ... on obtient $\omega_0 = 3.2\pi f, 5.2\pi f, 7.2\pi f \dots$ et le filtre laisse passer uniquement l'harmonique 3, 5, 7, ... (avec un changement de signe). En mesurant à chaque fois l'amplitude du signal de sortie, on détermine le spectre du signal d'entrée.