Géométrie
Chapitre 1

Géométrie affine euclidienne
Coniques — quadriques

Cours de sup : ▶ barycentres, sous-espaces affines, appli affine
géom ds le triangle

▶ dist euclidienne en dim 3
dist à 1 HP affine

I] Rappels

① distance d'un point à un HP affine

E euclidien de dim n

$\mathcal{H}$ HP affine connu par $\Omega \in \mathcal{H}$, $H = \vec{\mathcal{H}}$ | direction de $\mathcal{H}$ HP vect de E

$\mathcal{H} = \{\Omega + \vec{h} \,/\, \vec{h} \in H\}$

$\vec{u}$ vecteur normal (unitaire) de H ie $H = \{\vec{h} \in E / \vec{h}\cdot\vec{u} = 0\}$

$(H^\circ = \mathbb{R}\vec{u})$

$$M \in \mathcal{H} \iff \exists \vec{h} \in H,\ M = \Omega + \vec{h}$$
$$\iff \overrightarrow{\Omega M}\cdot\vec{u} = 0$$
$$\iff \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{O\Omega}\cdot\vec{u} = C$$

En pratique $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ RON de E

ie O origine, $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ BON de E

$\mathcal{H}$ d'eqn ds $\mathcal{R}$: $\boxed{\sum u_i x_i = C}$

$M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ $\quad \overrightarrow{OM} = \sum x_i \vec{e_i}$ $\quad$ et $\vec{u} = \sum u_i \vec{e_i}$

Soit $A \in E$, on déduit

$$d(A, \mathcal{H}) = \inf\{\|M - A\| \,/\, M \in \mathcal{H}\}$$
$$= \inf\{\|\overrightarrow{\Omega A} - \vec{h}\| \,/\, \vec{h} \in H\}$$
$$= d(\overrightarrow{\Omega A}, H) = \|p_{H^\circ}(\overrightarrow{\Omega A})\| = \left\|\frac{(\overrightarrow{\Omega A}\cdot\vec{u})\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right\| = \frac{|\overrightarrow{\Omega A}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

d'où $\mathcal{R}$ RON de E $\quad A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$

$\mathcal{H}$ d'eqn ds $\mathcal{R}$ $\quad \sum u_i x_i = C$

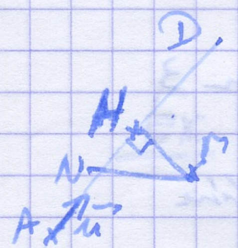
$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|\sum a_i u_i - C|}{\sqrt{\sum u_i^2}}$$

Géométrie Chapitre 1

② E ev euclidien orienté de dim 3

$D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ droite affine

$D = \{A + x\vec{u} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$



$M \in E$, $d(M, D) = \inf\{\|M - N\| \,/\, N \in D\}$

H PO de M / D, $\vec{MN} = \vec{MH} + \vec{HN}$

$\|\vec{MN}\|^2 = \|\vec{MH}\|^2 + \|\vec{HN}\|^2 \geq \|\vec{MH}\|^2$ atteint pour $N = H$

$d(M, D) = \|\vec{MH}\|$

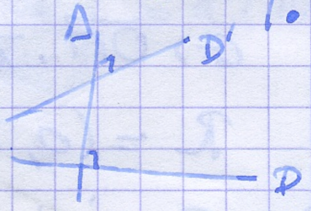
cf $\vec{MA} \wedge \vec{u} = (\vec{MH} + \vec{HA}) \wedge \vec{u} = \vec{MH} \wedge \vec{u}$, $\vec{MH} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \| \text{———} \| = \|\vec{MH}\| \|\vec{u}\|$

$$\Rightarrow \boxed{D = \mathcal{D}(A, \vec{u}),\quad d(M, D) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$$

③ D, D' 2 droites affines non // | • $\perp$ commune Δ ? • $d(D, D')$

$\begin{cases} D = \mathcal{D}(A, \vec{u}) \\ D' = \mathcal{D}(A', \vec{u}') \end{cases}$



Δ dirigée par $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}' \neq \vec{0}$ car $D \not\parallel D'$ $(\vec{u}, \vec{u}')$ libre

$P = \mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$, $P' = \mathcal{P}(A'; \vec{u}', \vec{v})$

$\underline{\Delta = P \cap P'}$ $\rightarrow$ trad analytique $\begin{cases} \text{——} & \leftarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \\ \text{——} \end{cases}$

$d(D, D') = \inf\{\|M - M'\| \,/\, M \in D, M' \in D'\}$

$M - M' = (M - H) + (H - H') + (H' - M')$

Pythagore $\|M - M'\| \geq \|H - H'\|^2$ égal si $M = H$, $M' = H'$

$\underline{d(D, D') = \|\vec{HH'}\|}$

$\vec{HH'} = \vec{HA} + \vec{AA'} + \vec{A'H'}$

$|\vec{HH'} \cdot \vec{v}| = |\vec{AA'} \cdot \vec{v}| = \|\vec{HH'}\| \|\vec{v}\|$

d'où $$\boxed{d(D, D') = \frac{|\vec{AA'} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u}')}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}}$$

Rem | $M = A + x\vec{u}$
| $M' = A' + y\vec{u'}$

$\|\vec{MM'}\|^2 = \text{—} = \varphi(x,y)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \inf_{\mathbb{R}^2} \varphi = \varphi(x_0, y_0)$

II) Coniques

ⓐ étude générale : MPSI

$\longrightarrow$ cf polycopié

éqn réduite des coniques

E plan euclidien

$\Gamma \subset E$ conique de type (T) s'il existe 1 BON

tq eqn de Γ ds R

(T) ellipse $\in R$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad (a>0, b>0)$

— HB — $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ——————

— PB — $y^2 = 2px$ $\quad (p>0)$

ⓑ Courbes du second degré

E plan euclidien, Γ d'eqn ds 1 RON $R = (O, B)$

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + C = 0$

où | $a, b, c, \alpha, \beta, C \in \mathbb{R}$
| $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Nature de Γ ?

ie $P(x,y) = 0$ $\quad P \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $d^\circ P = 2$

g $P = Q + \varphi + C$ avec | $Q \in \mathcal{Q}(E)$ $\quad (E = \mathbb{R}^2)$
| $\varphi \in E^*$

But Changer de RON tq eqn Γ ds R' réduite

▶ réduite Q en choisissant B' BON Q orthogonale

(réduction en carrés en BON)

$\vec{V} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$Q(\vec{V}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda x'^2 + \mu y'^2$

→ élimination si possible de xy par mise sous forme canonique

Ex E plan eucl $\mathcal{R}$ RON Γ d'équa ds $\mathcal{R}$:

$$\underbrace{2x^2 + xy + 2y^2}_{Q(\vec{V})} + x = 1$$

$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{OM}$ $M_e(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} = A$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $Q(\vec{V}) = {}^tX A X$ vap de A $\left| \begin{array}{l} \lambda = 5/2 \\ \mu = 3/2 \end{array} \right.$

E_λ : $-x + y = 0$ | E_μ : $x + y = 0$

$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ | $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$

$P = Pass_{(\vec{i},\vec{j}),(\vec{I},\vec{J})} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = R(\pi/4)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J})$

$\longrightarrow$ dans $\mathcal{R}'$: $\frac{5}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 + \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) = 1$

$\frac{5}{2}(x' - \alpha)^2 + \frac{3}{2}(y' - \beta)^2 = C$

$\left| \begin{array}{ll} \frac{5}{2}(-2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10} \\ \frac{3}{2}(-2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{2}}{6} \end{array} \right.$

$C = 1 + \frac{5}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\beta^2 = \frac{17}{15}$

Chgt d'origine $\mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ $X = x' - \alpha$

$Y = y' - \beta$

équa de Γ ds $\mathcal{R}''$: $\frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = C$

$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}C}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{2C}{3}}\right)^2} = 1$ $a = \sqrt{\frac{2}{5}C} = \sqrt{\frac{3C}{3}}$ $a > b$

$b = \sqrt{\frac{2C}{3}} = \sqrt{\frac{3C}{5}}$

$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$

Th : OM > PSG ∀ l'année !

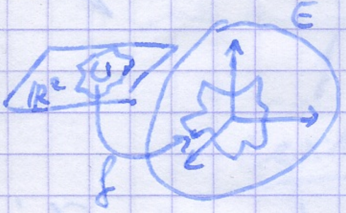
III Surfaces Particulières — Quadriques

E euclidien de dim 3 (souvent $E = \mathbb{R}^3$ ps can)

1) Surfaces

Définition $S \subset E$, surface de E si

(1) il existe $f \in C^1(U, E)$ où U ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que $S = f(U)$



S support de la nappe paramétrée (U, f)

ou

(2) il existe 1 repère R de E et $F \in C^1(V, \mathbb{R})$ où V ouvert de $\mathbb{R}^3$ tq S d'eqn ds R : $F(x,y,z) = 0$ eqn cart de S

$$S = \{ M(x,y,z)_R \; / \; (x,y,z) \in V, \; F(x,y,z) = 0 \}$$

2) Surfaces particulières (coniques, cylindriques, de révolution)

Définition $S \subset E$

(1) S cône de sommet $\Omega \in E$ si S est réunion d'1 famille de droites (affines) passant par Ω

$S = \bigcup_{i \in I} D_i$ $\quad (D_i)$ génératrices du cône

(2) S cylindre de direction Δ (Δ droite vectorielle de E) si S réunion de droites // à Δ

$S = \bigcup_{i \in I} D_i$ $\quad (D_i)$ génératrice de S

Rem Une surface S est réglée si S est 1 réunion de droites (dites génératrices)

Def $S \subset E$ est dite de révolution d'axe Δ si S est une réunion de cercles centrés sur Δ dans 1 plan perpendiculaire à Δ

$S = \bigcup \gamma_i$ $\quad (\gamma_i)$ cercles // de S

Π plan méridien plan contenant Δ

$\Pi \cap S$ méridienne de S

3) Surfaces quadriques, du second degré

$\mathbb{R}^3 = E$, $\mathcal{R}$ un RON

S d'eqn ds $\mathcal{R}$: $F(x,y,z) = 0$

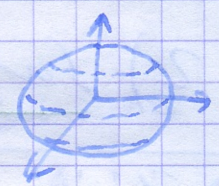
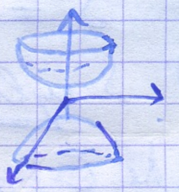
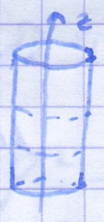
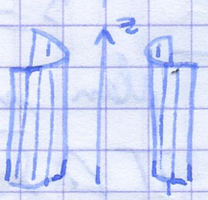
si $F \in Pol_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ $\qquad F = Q + \varphi + C$

$\qquad Q \in Q(E^*)$, $\varphi \in E^*$, $C \in \mathbb{R}$

pour les reconnaître, réduction de l'eqn

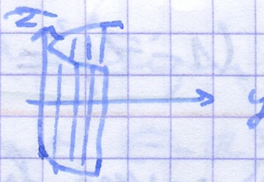
9 TYPES

S du type (T) s'il existe 1 RON R tq eqn réduite soit E

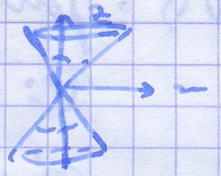
	(T)	(E)	(D)	(Rev)
QUADRIQUES	Ellipsoïde E	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a,b,c > 0)$		$a=b$ ou $a=c$ ou $b=c$
	Hyperboloïde à 1 nappe H_1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		$a=b$
	Hyperboloïde à 2 nappes H_2	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		$b=c$
	Paraboloïde elliptique PE	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ $a,b,p > 0$		$a=b$
	Paraboloïde hyperbolique PH	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$		
CYLINDRE	Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		
	Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		

(Rev)

Cylindre parabolique $\quad x^2 = 2py$



Cône du second degré $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



$a = b$

▶ Rep param d'1 surface

$f : U \to E \quad , \quad S = f(U) \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^2$

ex1: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$f : (\theta, \varphi) \mapsto (R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi)$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

▶ S donnée par 1 eqn cartésienne $F(x,y,z) = 0$

cf ex 1 : $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

▶ Surfaces particulières

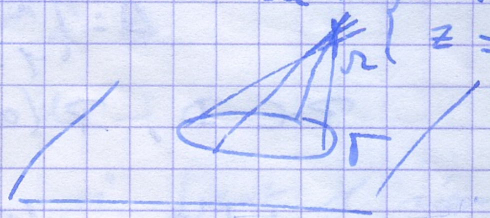
* surface réglée = S réunion de droites affines $(D_i)_{i\in I}$ (génératrices de S) $\quad S = \bigcup D_i$

* S cylindre de direction Δ $\quad S = \bigcup D_i \ , \ D_i \parallel \Delta$

* S cône de sommet Ω $\quad S = \bigcup D_i \ , \ \Omega \in D_i$

ex $\quad S$ cône de sommet $\Omega = (1,1,1)$ de directrice $\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

eqn de S ?



$M \in S \iff \exists A \in \Gamma,\ M \in D_A$

avec $D_A = \{A + k\,\overrightarrow{\Omega A} \ / \ k \in \mathbb{R}\}$

$= \{\Omega + t\,\overrightarrow{\Omega A} \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ si $M = (X, Y, Z)$,

$M \in S \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \exists A \in \Gamma \quad M = \Omega + t\,\overrightarrow{\Omega A}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 = 1$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = 1 + t(x-1) \\ Y = 1 + t(y-1) \\ Z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - 1 = t(x-1) \\ Y - 1 = t(y-1) \\ t = 1 - Z \end{cases}$

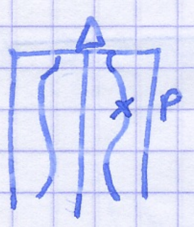
$\Rightarrow \begin{cases} tx = X + (t-1) \\ ty = Y + (t-1) \end{cases} \Rightarrow \ t^2 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{1} = \left[((X-1) + t)^2 + ((Y-1) + t)^2 \right]$

$(1-Z)^2 = (X-Z)^2 + (Y-Z)^2 \qquad (E)$

NB : pour les surfaces de révolution, $\Delta = \mathcal{D}(O, \vec{k})$

$P_i \in \gamma_i$, $\gamma_i = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathrm{Rot}_{\Delta,\theta}(P_i)$

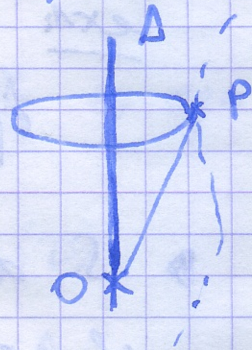
si on connait 1 méridienne (ou 1 demi méridienne)



de S, $P \in \mathcal{C}_P$ (cercle d'axe Δ, passant par P)

$\mathcal{C}_P$ = intersection de Π_P plan $\perp$ à Δ passant par P

et de la sphère de centre $O \in \Delta$ passant par P



Si $\Delta = Oz$, $\Delta = \mathcal{D}(O, \vec{k})$

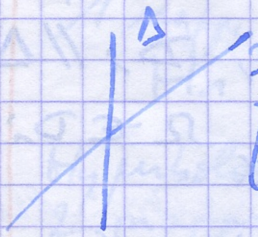
$M \in \mathcal{C}_P \iff \begin{cases} \vec{PM} \cdot \vec{k} = 0 \\ d^2(P, \Delta) = d^2(M, \Delta) \end{cases}$

$z_P = z_M$, $x_P^2 + y_P^2 = X_M^2 + Y_M^2$

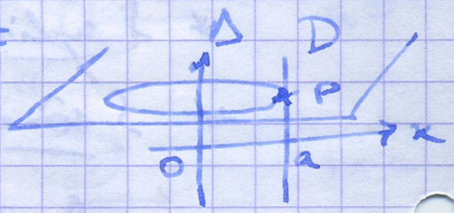
et éliminer P ...

$\boxed{\text{Ex } 1}$ $\mathcal{D}$, Δ 2 droites affines distinctes

$\longrightarrow$ Surface de révolution d'axe Δ engendrée par la rotation de D autour de Δ



choix du repère : $\Delta = Oz$



$\boxed{1^{e} \text{ cas}}$ $D \parallel \Delta$

plan des 2 droites xOz

$\Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad D : \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad a = d(D, \Delta) > 0$

$P \in D$, $P(a, 0, z)_R$ $\qquad \mathcal{C}_P : \begin{cases} Z = z \\ X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

$\bigcup \mathcal{C}_P$ d'éqn $X^2 + Y^2 = a^2$. cyl de révolution d'axe Δ

$\boxed{2^{e} \text{ cas}}$ $D \not\parallel \Delta$

① $D \cap \Delta = \{O\}$ $\qquad xOz$ plan de D et Δ

1) $D \perp \Delta$ $\qquad P \in D$, $\mathcal{C}_P = X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$ arbitraire

$\longrightarrow \bigcup \mathcal{C}_P = xOy$

2) $D \not\perp \Delta$

$\theta = (\Delta, D) \in \left]0, \pi/2\right[$

D d'eqn $\left|\begin{array}{l} x = z\tan\theta \\ y = 0 \end{array}\right.$

$\mathcal{C}_P$: $\left|\begin{array}{l} Z = z \\ X^2+Y^2 = x^2+y^2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow X^2+Y^2 = Z^2\tan^2\theta$ (E)

rec^t $\forall M(X,Y,Z)$ tq (E)

définir P : $\left|\begin{array}{l} z_P = Z \\ y_P = 0,\ x_P = z_P\tan\theta \end{array}\right.$, $\forall M \in \mathcal{C}_P$

$\longrightarrow$ S cône de sommet O de révolution

$\theta = \frac{1}{2}$ angle au sommet

S d'eqn $X^2+Y^2 = Z^2\tan^2\theta$

② $D \cap \Delta = \emptyset$

R repère tq Ox perpendiculaire commune

$D : \left|\begin{array}{l} x = a \\ y = hz \quad h \in \mathbb{R}^* \end{array}\right.$

$P \in D$ (x_P, y_P, z_P) $\left|\begin{array}{l} x_P = a \\ y_P = h z_P \end{array}\right.$

$M \in \mathcal{C}_P \iff \left|\begin{array}{l} Z = z_P \\ X^2+Y^2 = x^2+y^2 = a^2+h^2 z_P^2 \end{array}\right.$

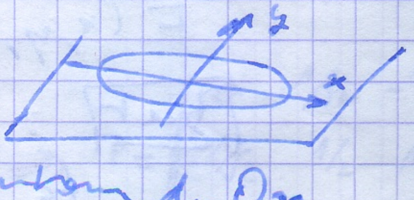
$\Longrightarrow X^2+Y^2 = a^2+h^2Z^2$

$\Rightarrow \frac{X^2+Y^2}{h^2a^2} - \frac{Z^2}{a^2} = 1$

$\longrightarrow$ $S = H_1$ de révolution

Ex 2 Quadrique de révolution : obtenue en faisant tourner 1 conique autour d'1 de ses axes de symétrie.

• Ellipse $(\mathcal{E})$ $\left|\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$



S obtenue en faisant tourner $(\mathcal{E})$ autour de Ox

$P \in \mathcal{E}$ $\quad \mathcal{C}_P : \left|\begin{array}{l} X = x_P \\ \underbrace{Y^2+Z^2}_{= d^2(M,Ox)} = y_P^2+z_P^2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow P \left|\begin{array}{l} x_P \\ y_P \\ z_P = 0 \end{array}\right.$

→ eqn de S : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2+Z^2}{b^2} = 1$

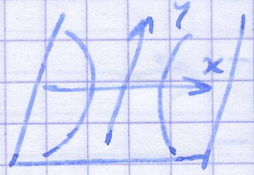
→ ellipsoïde de révolution (allongé cf figure)

(autour de Oy : ellipsoïde de révolution aplati

$\dfrac{X^2+Z^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ eqn des Smarties)

•• <u>Hyperbole</u> $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z=0$

<u>autour de Ox</u>



S : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{(Y^2+Z^2)}{b^2} = 1$

→ H_2 de révolution d'axe Ox

<u>autour de Oy</u>

$\dfrac{X^2+Z^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

→ H_1 de révolution d'axe Oy

∴ <u>Parabole</u> (R RON) $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = 0 \end{cases}$ $p > 0$

axe de symétrie : Oy

$P \in \mathcal{P}$ $P(x_p, y_p, z_p)$ $z_p = 0$, $x_p^2 = 2py_p$

$M \in \mathcal{C}_P$ cercle d'axe Ox passant par P

$Y = y_p$, $d^2(M, Oy) = d^2(P, Oy)$

$\Rightarrow X^2 + Z^2 = x_p^2 + 0$

$\Rightarrow X^2 + Z^2 = 2pY$ → Paraboloïde de révolution d'axe Oy

---

<u>Surfaces du deuxième degré</u>

S d'eqn ds 1 repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ON :

$F(x,y,z) = 0$ où $F \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\boxed{\text{but}}$: chgt de repère R' (base + origine)

tq S eqn réduite connue ds R'

$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exy + 2fyz + \alpha x + \beta y + \gamma z + C$

$M = O + \underbrace{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}_{\vec{V} = \vec{OM}}$

$Q(V) = ax^2 + \text{——} + 2fyz \quad \in Q(E)$

$\varphi(V) = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad \in E^*$

c constante

soit $B' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ BON de E Q-orthogonale

$V = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$

et $Q(V) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$

puis éliminer si possible ou simplifier $\varphi \in E^*$

par changem^t d'origine Ω

tq eqn de S ds $R' = (\Omega, B')$ réduite (cf

9 types connus)

$\boxed{Ex}$ ① S_1 d'eqn ds R RON $\quad R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$$

② S_2 d'eqn

$$7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$$

Nature ?

① $\text{Mat}(Q(V)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$$

- $AX = X \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $AX = \lambda_2 X \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = (1-\sqrt{2})x \\ -x + y = (1-\sqrt{2})y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y \\ z = -2y + y = -y \end{cases}$

3^e eqn inutile cf dimension

$\Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $U_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$X = PX' \Rightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\, Y - 1/\sqrt{2}\, Z \\ y = 1/\sqrt{2}\, X + 1/2\, Y + 1/2\, Z \\ z = 1/\sqrt{2}\, X - 1/2\, Y - 1/2\, Z \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + (1-\sqrt{2})Y^2 + (1+\sqrt{2})Z^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)Y + \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2} - 1\right)Z + 1 = 0$

$\Rightarrow X^2 + (1-\sqrt{2})(Y-\alpha)^2 + (1+\sqrt{2})(Z-\beta)^2 = \underbrace{-1 + \alpha^2(1-\sqrt{2}) + \beta^2(1+\sqrt{2})}_{\gamma}$

$-(1-\sqrt{2})\, 2\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \qquad \alpha = \dots = \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \; \beta = \frac{4+\sqrt{2}}{4}$

et $\gamma = \dots = \frac{5}{4}$

$X' = X, \quad Y' = Y - \alpha, \quad Z' = Z - \beta$

$\Rightarrow \frac{X'^2}{a^2} - \frac{Y'^2}{b^2} + \frac{Z'^2}{c^2} = 1$ où $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$b = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}}$

$\longrightarrow \boxed{H_1}$ $\qquad c = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

Exercice

— Parmi les 9 surfaces de référence, quelles sont celles qui sont réglées.

Déjà dans les quadriques : PH + H_1

Recherche des droites contenues ds S

PH $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$

$H_1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(2 cas D horizontale
— ds 1 plan d'éqn $z = c$
— sinon $\left| \begin{array}{l} x = pz + a \\ y = qz + b \end{array} \right.$ z qcq)

$\boxed{PH}$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ dans R RON $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

S

(1) Famille de droites $\qquad A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$\longrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2pz$

$P_\lambda : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda$

$P_\lambda \cap S$, $\lambda \neq 0$: $D_\lambda = P_\lambda \cap S$: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2pz}{\lambda} \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \end{array} \right.$

$\lambda = 0$: $\Pi : z = 0 \qquad \Pi \cap S : \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{array} \right. (\Delta_0)$ ou $\left(\begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{array} \right. (\Delta_0')$

$$S = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^*} D_\lambda \right) \cup \Delta_0 \cup \Delta_0'$$

soit $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$

2 cas

① $\vec{u} \in \mathrm{Vect}(\vec{j}, \vec{k})$

② $\vec{u} \notin \mathrm{vect}(\vec{j}, \vec{k})$

① $\vec{u} \in P : x = k$

$P \cap S : \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ parabole $\rightarrow$ aucune droite

② $\vec{u} = \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ $\alpha \neq 0$

$D : M = A + x\vec{u}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ q \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ NB : $A \in yOz$; D coupe yOz en 1 point

$\rightarrow \begin{cases} y = t + x\beta \\ z = q + x\gamma \end{cases}$ $D \subset S \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(t+x\beta)^2}{b^2} = 2p(q + x\gamma)$

pn nul $\rightarrow$ ts les coef nuls

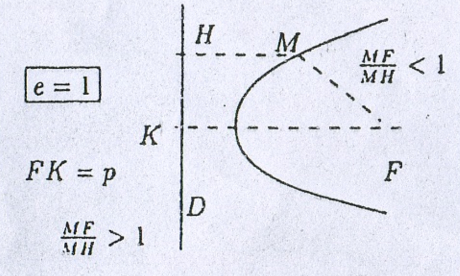
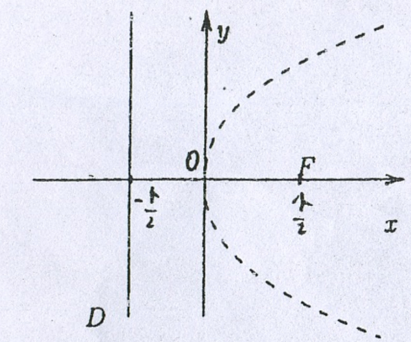
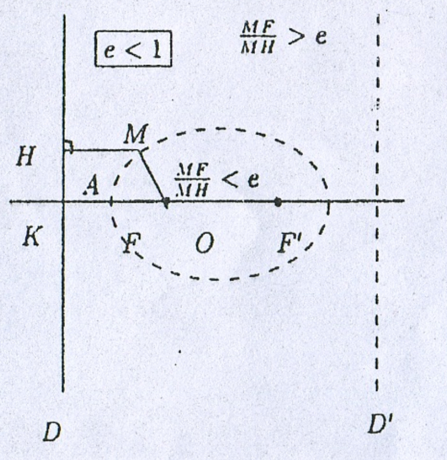
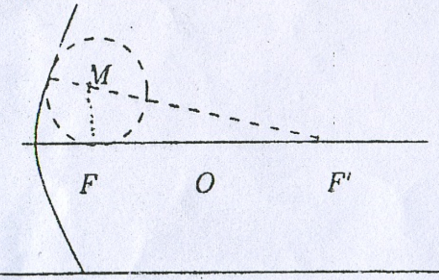
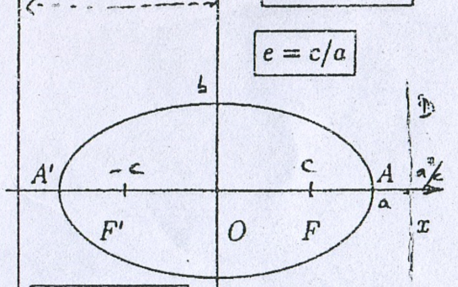
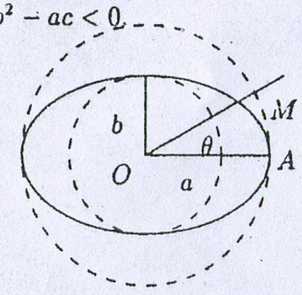
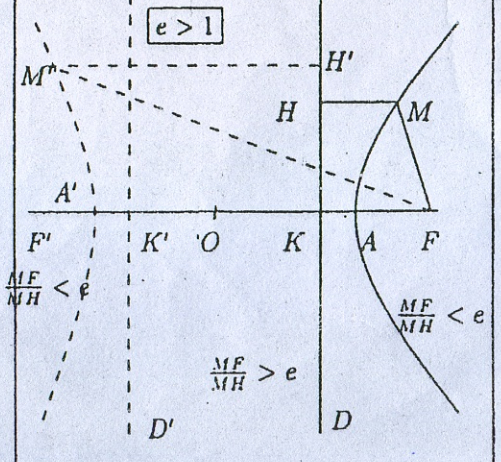
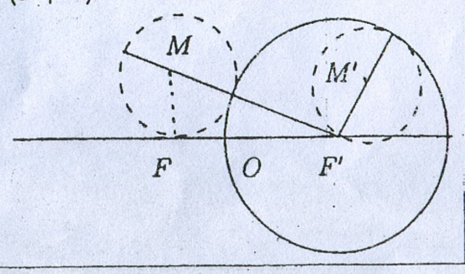
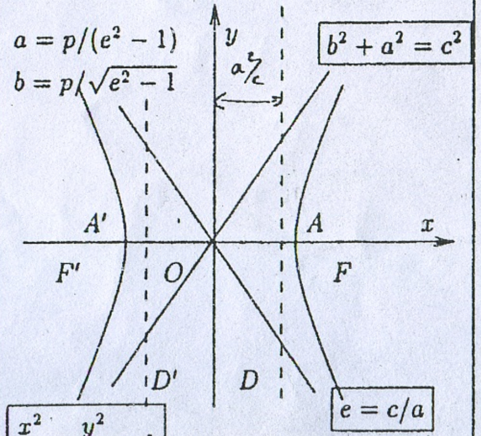
$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2} \\ \dfrac{-2t\beta}{b^2} = 2p\gamma \\ \dfrac{-t^2}{b^2} = 2pq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \varepsilon \dfrac{b}{a} \\ \gamma = \dfrac{-t\beta}{b^2 p} = -\varepsilon \dfrac{t}{bpa} \\ q = \dfrac{-t^2}{b^2 2p} \end{cases}$

$\Rightarrow y = t + \varepsilon x \dfrac{b}{a} \longrightarrow \dfrac{y}{b} - \varepsilon \dfrac{x}{a} = \dfrac{t}{b}$ λ

$z = \dfrac{-t^2}{2pb^2} - \varepsilon x \dfrac{t}{bpa} \longrightarrow \dfrac{y}{b} + \varepsilon \dfrac{x}{a} = \dfrac{t}{2bp}$

Tableau récapitulatif sur les coniques

Équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ $(p = ed)$

	Définition monofocale (foyer F, direction D) + régionnement: $MH = d(M,D)$ $FK = p/e$, $\boxed{MF/MH = e}$	Définition bifocale. F, F' fixes, O milieu de $[F, F']$ $FF' = 2c$, $OA = a$.	Équation réduite (Cadre analytique)	Équation paramétrique ou autres équations.
PARABOLE	$\boxed{e = 1}$  $FK = p$ $\frac{MF}{MH} < 1$ $\frac{MF}{MH} > 1$ Lieu des centres des cercles passant par un point et tangents à une droite donnée D (ne contenant pas le point)		 $\boxed{y^2 = 2px}$ $\left(\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \dots \right)$	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2d'y + k = 0$ avec $b^2 - ac = 0$. Tangente en (x_0, y_0) : $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$.
ELLIPSE	$\boxed{e < 1}$ $\frac{MF}{MH} > e$  $\frac{MF}{MH} < e$	$\boxed{MF + MF' = 2a}$ $\boxed{a > c}$ Lieu des centres des cercles passant par un point et tangents au cercle $(F', 2a)$. 	 $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ $\boxed{e = c/a}$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $a = p/(1 - e^2)$ $b = p/\sqrt{1 - e^2}$	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2d'y + k = 0$ avec $b^2 - ac < 0$.  $(x_0 = a\cos\theta,\ y_0 = b\sin\theta)$ Tangente en (x_0, y_0) : $\frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1$ ou $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$
HYPERBOLE	$\boxed{e > 1}$  $\frac{MF}{MH} < e$ $\frac{MF}{MH} > e$	$\boxed{\lvert MF - MF' \rvert = 2a}$ $\boxed{a < c}$ Lieu des centres des cercles passant par un point F et tangents au cercle $(F', 2a)$. 	$a = p/(e^2 - 1)$ $b = p/\sqrt{e^2 - 1}$ $\boxed{b^2 + a^2 = c^2}$  $\boxed{e = c/a}$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ Asymptotes : $y = \pm\frac{b}{a}x$	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2d'y + k = 0$ avec $b^2 - ac > 0$. Dans un repère constitué par les asymptotes : $XY = c^2/4$ Équation de la tangente en (x_0, y_0) : $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$