Fachbereich Mathematik/Informatik **2. Juli 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur II

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	4	3	5	4	3	3	5	5	10	7	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *Normalteiler* N in einer Gruppe G.
(2) Eine *auflösbare* Gruppe G.
(3) Eine *n-te primitive* Einheitswurzel ζ in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(4) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(5) Ein *separables* Polynom $P \in K[X]$ über einem Körper K.
(6) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(7) Eine (endliche) *Galoiserweiterung* $K \subseteq L$.
(8) Der n-te *Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Lemma von Dedekind* für Charaktere auf einem Monoid M in einen Körper K.
(2) Der *Satz über die Galoiskorrespondenz* bei einer endlichen Galoiserweiterung $K \subseteq L$.
(3) Das *Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium* (über $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$).
(4) Der *Satz über den Grad der Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\pi + ei$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (4 (1+1+2) Punkte)

a) Zeige, dass durch

$$K = \mathbb{Z}/(7)[T]/(T^3 - 2)$$

ein Körper mit 343 Elementen gegeben ist.

b) Berechne in K das Produkt $(T^2 + 2T + 4)(2T^2 + 5)$.

c) Berechne das (multiplikativ) Inverse zu $T + 1$.

AUFGABE 5. (4 (1+1+1+1) Punkte)
Wir betrachten das Polynom
$$P = X^{7129} + 105X^{103} + 15X + 45\,.$$
Bestimme für die folgenden Körper K, ob P irreduzibel in $K[X]$ ist.

a) $K = \mathbb{Q}$.

b) $K = \mathbb{R}$.

c) $K = \mathbb{Z}/(2)$.

d) $K = \mathbb{Q}[T]/(T^{7129} + 105T^{103} + 15T + 45)$.

AUFGABE 6. (3 (1+2) Punkte)
Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei
$$\kappa : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

AUFGABE 7. (5 Punkte)
Es sei K ein Körper. Beweise die Produktregel für das formale Ableiten
$$D : K[X] \longrightarrow K[X],\; F \longmapsto F'.$$

AUFGABE 8. (4 Punkte)
Beweise das Lemma von Dedekind für zwei Charaktere
$$\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow K$$
auf einem Monoid G in einen Körper K.

AUFGABE 9. (3 Punkte)
Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus
$$\Phi : \mathbb{F}_{25} \longrightarrow \mathbb{F}_{25}$$
bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathbb{F}_{25}$.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Wie viele Unterkörper besitzt der endliche Körper $\mathbb{F}_{625}$?

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Sei $D = \mathbb{Z}/(n)$ und sei K ein Körper, der eine n-te primitive Einheitswurzel ζ enthält. Es sei L eine D-graduierte Körpererweiterung von K. Beschreibe die Matrizen der K-Algebra-Automorphismen auf L (also die Elemente der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$) bezüglich einer geeigneten K-Basis von L.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \operatorname{Fix}(H_1)$ und $K_2 = \operatorname{Fix}(H_2)$. Zeige, dass der Durchschnitt $K_1 \cap K_2$ gleich dem Fixkörper zu H ist, wobei H die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe bezeichnet (das ist die kleinste Untergruppe von G, die sowohl H_1 als auch H_2 enthält).

Aufgabe 13. (10 (4+6) Punkte)

Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ (in $\mathbb{C}$) der n-te Kreisteilungskörper und sei ζ eine n-te primitive Einheitswurzel. Wir betrachten die Elemente ζ^i, $i \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

a) Zeige, dass für eine Primzahl $n = p$ diese Elemente eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

b) Sei p eine Primzahl und $n = p^2$. Zeige, dass diese Elemente keine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

Aufgabe 14. (7 Punkte)

Es sei G eine auflösbare Gruppe und

$$q : G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass auch H auflösbar ist.