Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 24

Reihen

Wir betrachten Reihen von komplexen Zahlen.

Definition 24.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, .$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert*. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Lemma 24.2. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.1. □

Lemma 24.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *mit* $c_n = a_n + b_n$ *ist ebenfalls konvergent mit der Summe* $s+t$.
(2) *Für* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist auch die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ *mit* $d_n = \lambda a_n$ *konvergent mit der Summe* λs.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.3. □

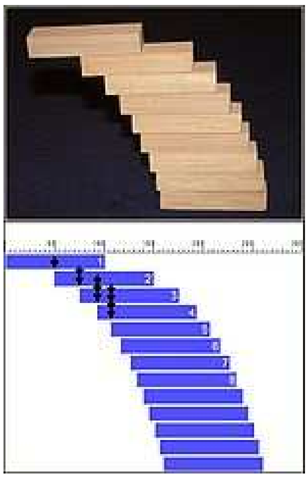
Lemma 24.4. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 24.2. □



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Beispiel 24.5. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,.$$

Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \Big) = 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.8 nicht konvergent sein.

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

SATZ 24.6. *(Leibnizkriterium für alternierende Reihen) Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k$.

Beweis. Wir setzen
$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k \,.$$
Wir betrachten die Teilfolge mit geradem Index. Für jedes n gilt wegen $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$ die Beziehung
$$s_{2(n+1)} \; = \; s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} \; \leq \; s_{2n},$$
d.h. diese Teilfolge ist fallend. Ebenso ist die Folge der ungeraden Teilsummen wachsend. Es gelten die Abschätzungen
$$s_0 \; \geq \; s_{2n} \; \geq \; s_{2n-1} \; \geq \; s_1.$$
Daher sind die beiden Teilfolgen fallend und nach unten beschränkt bzw. wachsend und nach oben beschränkt, und daher wegen Korollar 8.10 konvergent. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = x_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ stimmen die Grenzwerte überein. □

Absolute Konvergenz

DEFINITION 24.7. Eine Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, a_k \,|$$

konvergiert.

Satz 24.8. *Eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$| \sum_{k=m}^{n} | a_k | | = \sum_{k=m}^{n} | a_k | \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$| \sum_{k=m}^{n} a_k | \leq | \sum_{k=m}^{n} | a_k | | \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 24.9. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 24.8 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

und zwar ist ihr Grenzwert ln 2, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 24.5 divergiert.

Satz 24.10. *(Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $| a_k | \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $z \in \mathbb{C}$, es geht also um die Summe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots .$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von z ab.

Satz 24.11. *Für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} .$$

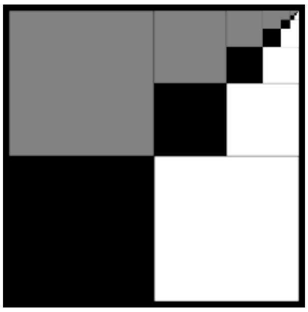
Beweis. Für jedes z gilt die Beziehung

$$(z-1)(\sum_{k=0}^{n} z^k) = z^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $z \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|z| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$. □



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $z = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Satz 24.12. *(Quotientenkriterium) Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (Insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. Die Konvergenz[1] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k \;=\; \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \;\leq\; a_0 q^k .$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Summierbarkeit

Bei einer Reihe sind die aufzusummierenden Glieder durch die natürlichen Zahlen geordnet. Häufig kommt es vor, dass diese Ordnung verändert wird. Dafür ist es sinnvoll, einen Summationsbegriff zu besitzen, der unabhängig von jeder Ordnung der Indexmenge ist. Wir werden diese Theorie nicht systematisch entwickeln, sondern nur den großen Umordnungssatz beweisen, den wir bald für das Entwickeln einer Potenzreihen in einem neuen Entwicklungspunkt benötigen. Die Familie sei gegeben als a_i , $i \in I$. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ kann man die zugehörigen Glieder aufsummieren, und wir setzen

$$a_E = \sum_{i \in E} a_i \, .$$

Eine sinnvolle Aufsummierung der gesamten Familie muss Bezug auf diese endlichen Teilsummen a_E nehmen.

Definition 24.13. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung

$$| a_E - s | \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_E = \sum_{i \in E} a_i$. Im summierbaren Fall heißt s die *Summe* der Familie.

Definition 24.14. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt eine *Cauchy-Familie*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart gibt, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_0 \cap D = \emptyset$ die Beziehung

$$| a_D | \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_D = \sum_{i \in D} a_i$.

[1] Wohl aber die Summe.

Lemma 24.15. *Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Dann ist die Familie genau dann summierbar, wenn sie eine Cauchy-Familie ist.*

Beweis. Sei zunächst die Familie summierbar mit der Summe s, und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon/2$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Mengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Abschätzung $|\, a_E - s \,| \leq \epsilon/2$ gilt. Für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge D gilt dann

$$\begin{aligned} |\, a_D \,| &= |\, a_D + a_{E_0} - s - a_{E_0} + s \,| \\ &\leq |\, a_D + a_{E_0} - s \,| + |\, a_{E_0} - s \,| \\ &= \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

so dass die Cauchy-Bedingung erfüllt ist. Sei nun a_i , $i \in I$, eine Cauchy-Familie. Wir brauchen zunächst einen Kandidaten für die Summe. Für jedes $n \in N_+$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ derart, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_n \cap D = \emptyset$ die Abschätzung $|\, a_D \,| \leq 1/n$ gilt. Wir können annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n gilt. Wir setzen

$$x_n := a_{E_n} = \sum_{i \in E_n} a_i \, .$$

Für $k \geq m \geq n$ gilt

$$|\, x_k - x_m \,| = |\sum_{i \in E_k} a_i - \sum_{i \in E_m} a_i \,| = |\, a_{E_k \setminus E_m} \,| \leq 1/m \leq 1/n,$$

da die Menge $E_k \setminus E_m$ disjunkt zu E_m ist. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergent gegen ein $s \in \mathbb{C}$. Wir behaupten, dass die Familie summierbar ist mit der Summe s. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}_+$ mit $1/n \leq \epsilon/2$. Dann ist wegen der Folgenkonvergenz $|\, x_n - s \,| \leq \epsilon/2$. Für jedes endliche $E \supseteq E_n$ schreiben wir $E = E_n \cup D$ mit $E_n \cap D = \emptyset$. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\, a_E - s \,| &= |\, a_{E_n} + a_D - s \,| \\ &\leq |\, a_{E_n} - s \,| + |\, a_D \,| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 24.16. *Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Dann ist auch a_i , $i \in J$, summierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 24.12. □

Abbildungsverzeichnis