Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 51

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 51.1. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

AUFGABE 51.2. Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ ist φ regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

AUFGABE 51.3. Seien $L_1, \ldots, L_n$ und $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und seien

$$\varphi_i : L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i. Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \ldots, P_n)$ gleich $F_1 \times \cdots \times F_n$ ist.

AUFGABE 51.4. Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

AUFGABE 51.5. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und den Fasern von φ an.

Aufgabe 51.6. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von φ an.

Aufgabe 51.7. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy.$$

Aufgabe 51.8. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.9. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass

$$\varphi(x,y) \;=\; f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 51.10. (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt $P = (x,y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P = (x,y)$ eine offene Umgebung $(x,y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$

gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 51.11. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 51.12. (3 Punkte)

Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Aufgabe 51.13. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt $P = (1, -1, 2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes $T_P F$ an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

Aufgaben zum Hochladen

Aufgabe 51.14. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

Aufgabe 51.15. (4 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

Aufgabe 51.16. (8 Punkte)

Man fertige eine Animation an, die den Banachschen Fixpunktsatz anhand eines „Karte in der Karte“-Modells illustriert.