Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 2

Aufgabe 2.1. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 2.2. Beweise die mengentheoretische Fassung einiger aristotelischen Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen. Man formuliere auch die einzelnen Mengenbeziehungen mittels Quantoren.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \cap C \neq \emptyset$ folgt $A \cap C \neq \emptyset$.

Welche dieser Aussagen kann man durch Betrachten von Komplementen auf andere zurückführen?

Aufgabe 2.3. Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$.
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 2.4. Man gebe für die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen formallogische Beschreibungen.

(1) Die Menge der geraden Zahlen,

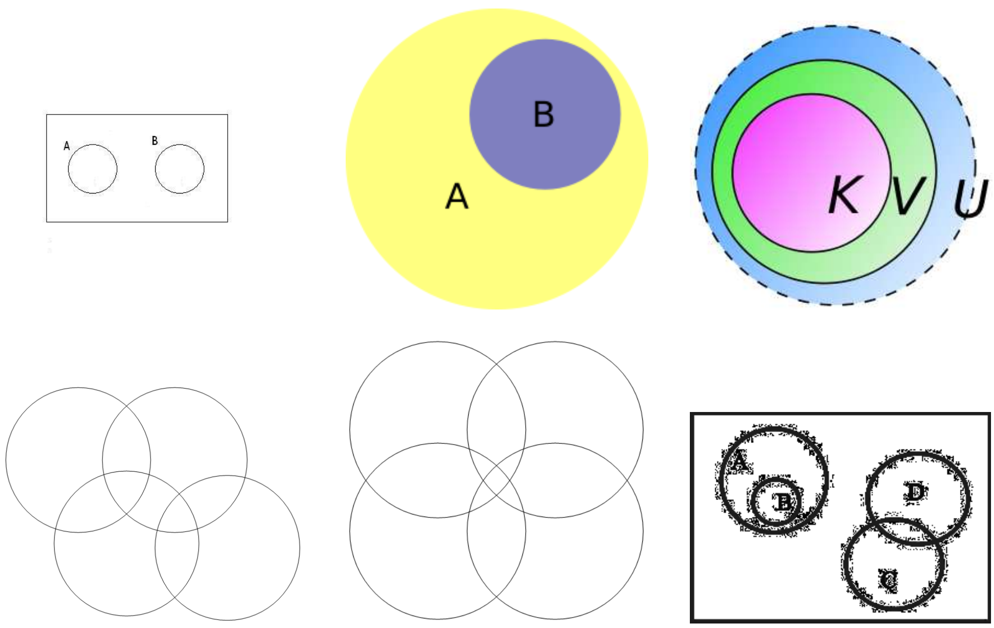
(2) Die Menge der Zahlen, die durch vier teilbar sind,
(3) Die Menge der ungeraden Zahlen,
(4) Die Menge der Quadratzahlen,
(5) Die Menge der Primzahlen,
(6) Die Menge der Zahlen, die als Summe von drei Quadratzahlen geschrieben werden können.

Aufgabe 2.5. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) : x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) : x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) : |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) : 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) : xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) : xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) : xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) : 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) : 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 2.6. Betrachte die folgenden Mengendiagramme. Welche möglichen Schnittmengen der beteiligten Mengen werden in diesen geometrisch repräsentiert, welche nicht?



Aufgabe 2.7. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

Aufgabe 2.8. Finde für die folgenden drei Mengen

$$\{1,3,5,7,9,\dots\},\ \{1,2,4,8,16,\dots\},\ \{9,99,999,9999,99999,\dots\}$$

(die alle die Form $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$ besitzen) jeweils ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + c_4 k^4$$

(mit Koeffizienten $c_j \in \mathbb{Q}$) mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2,\ P(3) = a_3,\ P(4) = a_4,\ P(5) = a_5\,.$$

Man mache sich die Situation zunächst für die ersten ein, zwei, drei Elemente der Auflistung klar.

Aufgabe 2.9. Finde Parallelen zwischen Aussagen- und Quantorenlogik einerseits und Mengentheorie andererseits.

Aufgabe 2.10. Betrachte die „Definition“

Ein Hinz ist ein Kunz, dessen Schlonz ein Ranz ist,

und nehmen wir an, dass es sich um eine sinnvolle Definition handelt. Beantworte folgende Fragen.

(1) Welcher Begriff wird neu eingeführt, welche sind schon bekannt?
(2) Besitzt jeder Kunz einen Schlonz?
(3) Besitzt jeder Hinz einen Schlonz?
(4) Ist jeder Hinz ein Kunz?
(5) Ist jeder Kunz ein Hinz?
(6) Ist der Schlonz von jedem Kunz ein Ranz?
(7) Ist der Schlonz von jedem Hinz ein Ranz?
(8) Ist jeder Hinz ein Ranz?
(9) Kann es einen Schlonz geben, der nicht zu einem Kunz gehört?
(10) Wie kann man die Vermutung widerlegen, dass jeder Kunz ein Hinz ist?

Aufgabe 2.11. Es sei M eine Menge von Aussagenvariablen und S die damit definierte formale Sprache, also die Menge aller formalen Ausdrücke, die man von M ausgehend mittels den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und mit Klammern „sinnvoll“ basteln kann. Man gebe eine präzise *induktive Definition*[1] für die

[1]Man spricht auch von einer *generativen Definition*, d.h. die Menge wird durch eine *Startmenge* und eine Menge von *Erzeugungsregeln* beschrieben.

Menge S. (Man mache sich zunächst an Beispielen klar, was zu S gehören soll und was nicht. Für Informatiker: man schreibe ein Computerprogramm, das aus M alle Elemente von S generiert.)

Abbildungsverzeichnis