Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass das Bild unter einem Ringhomomorphismus ein Unterring ist.

Aufgabe 2. Zeige, dass das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus nicht unbedingt wieder ein Ideal ist.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 4. Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Zeige direkt, ohne mit Restklassen zu argumentieren, dass eine Primzahl p die Eigenschaft besitzt, dass wenn p ein Produkt teilt, dass sie dann einen der Faktoren teilt.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Studiere den kanonischen Ringhomomorphismus in den Endomorphismenring für $R = \mathbb{Z}/(n)$ für $n > 0$.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Berechne 3^{1571} in $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei f_j, $j \in J$, eine Familie von Elementen in R. Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es dann bereits eine endliche Teilfamilie f_j, $j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei I ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/I$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die I umfassen.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Zeige, dass jeder Restklassenring eines Hauptidealringes selbst wieder ein Hauptidealring ist. Man gebe ein Beispiel, dass ein Restklassenring eines Hauptidealbereiches kein Hauptidealbereich sein muss.

In der folgenden Aufgabe darf man wieder den topologischen Raum X durch einen metrischer Raum bzw. eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ersetzen.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $R = \operatorname{Cont}(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen auf X. Es sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Teilmenge

$$I = \{f \in R : \ f|_T = 0\}$$

ein Ideal in R ist. Definiere einen Ringhomomorphismus

$$R/I \longrightarrow \operatorname{Cont}(T, \mathbb{R}).$$

Ist dieser immer injektiv? Surjektiv?