Mathematik I

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2009/2010

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik I wieder, die ich im Wintersemester 2009/2010 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte, die im direkten Anschluss an die einzelnen Vorlesungen öffentlich gemacht wurden. Ich habe diese Veranstaltung zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

 Ich bedanke mich bei der Wikiversity Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen, bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und erstellte Bilder und bei Frau Marianne Gausmann für die Erstellung des Pdf-Files. Bei Diplom-Math. Simone Böttger, Almar Kaid, Axel Stäbler bedanke ich mich für die Korrekturen der Aufgaben.

Holger Brenner

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungen

1. Vorlesung

1.1. Mengen.

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein Paradies, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M\,.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

1.2. **Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist wohl, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

Neben endlichen Auflistungen gibt es auch noch solche Auflistungen, bei denen nach einer endlichen Auflistung eine unendliche Weiterführung durch Punkte $(\ldots)$ angedeutet wird. Damit ist gemeint, dass die ersten Elemente der Auflistung einen Bildungsprozess erkennen lassen, mit dem man alle weiteren Elemente bestimmen kann. Beispiele sind

$$\{1,3,5,7,9,\ldots\},\ \{1,2,4,8,16,\ldots\},\ \{9,99,999,9999,99999,\ldots\}$$

und ähnliche. Dies ist grundsätzlich problematisch, da es für jede endliche Liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n Zahlen ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \ldots + c_d k^d$$

vom Grad $d \leq n$ gibt mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2, \ldots, P(n) = a_n\,.$$

Es gibt also stets ein mehr oder weniger einfaches polynomiales Bildungsgesetz, das aber oben nur im linken Beispiel die vermutlich gemeinte Vorschrift ist.

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x(x \in N \rightarrow x \in M)$.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wir werden diese Menge erstmal so akzeptieren und später noch eine Axiomatik dafür angeben.[2] Wichtig ist aber, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M : E(x)\} = \{x \in M : x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}.$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\},$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\},$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Quadratzahl}\},$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K : x \text{ kommt aus Osnabrück}\},$$

[2]Und zwar werden wir später die natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome axiomatisieren, bis dahin verwenden wir sie aber schon manchmal, vor allem in Beispielen, ebenso wie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$P = \{x \in K : x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\},$$

$$D = \{x \in K : x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\}.$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x : x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\}.$$

1.3. **Mengenoperationen.**

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

- *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\},$$

- *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$CA = G \setminus A = \{x \in G : x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

1.4. **Konstruktion von Mengen.**

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie bspw. den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ (die man sicher auch ohne jede tiefere Rechtfertigung als Menge akzeptieren kann) durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[3] Wir definieren.[4]

[3]darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

[4]Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Namen (eine Bezeichnung)

Definition 1.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) : \, x \in L, \, y \in M\}$$

die *Produktmenge*[5] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

Beispiel 1.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

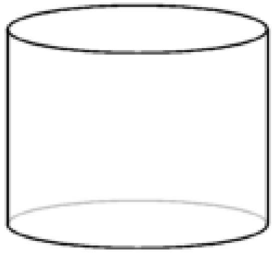
die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktmengen A und B gegeben sind, bspw. als Teilmengen einer Ebene E, so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auf in einer kleineren Dimension realisieren kann.

---

gegeben. Dieser Namen wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt

[5]Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke.

Beispiel 1.3. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge der Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subset E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 1.4. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}\,(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}\,(M) = \{T : T \text{ ist Teilmenge von } M\}\,.$$

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

1.5. **Abbildungen.**

Definition 1.5. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F : L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument.*

Zwei Abbildungen

$$F, G : L \longrightarrow M$$

sind gleich, wenn sie die gleiche Definitionsmenge und die gleiche Wertemenge besitzen und wenn für alle $x \in L$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in M gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Zu zwei Mengen L und M bezeichnet man die *Menge der Abbildungen* von L nach M mit

$$\mathrm{Abb}\,(L, M) = \{f : L \to M : \ f \text{ Abbildung}\}\,.$$

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\ x \longmapsto x,$$

also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow M,\ x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[6]

Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Definition 1.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M : \text{ es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von* S unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \mathrm{Bild}\,(F)$$

das *Bild der Abbildung.*

[6] Von Hilbert stammt die etwas überaschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

Definition 1.7. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L : \ F(x) \in T\}$$

das *Urbild von* T unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von* y.

1.6. **Injektive und surjektive Abbildungen.**

Definition 1.8. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

- *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.
- *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.
- *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 1.9. Es sei $F : L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G : M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

1.7. **Hintereinanderschaltung von Abbildungen.**

Definition 1.10. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) = G(F(x))\,,$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Beispiel 1.11. Es sei P eine Menge von Personen, die ein Café besucht, G eine Menge von Getränken, die auf der Getränkekarte des Cafés aufgelistet sind, und Z die Arbeitskräfte im Café, die für die Zubereitung verschiedener Getränke zuständig sind. Es wird eine Bestellung aufgegeben, wobei jede Person $p \in P$ genau ein Getränk $g = g(p) \in G$ bestellt, d.h. man hat eine (Bestell-)Abbildung

$$\beta : P \longrightarrow G,\, p \longmapsto \beta(p).$$

Die Injektivität der Abbildung bedeutet, dass alle Personen ein verschiedenes Getränk bestellen (was sein kann oder nicht sein kann, das ist eben eine Eigenschaft der Bestellung=Abbildung) und die Surjektivität bedeutet, dass jedes Getränk der Karte mindestens einmal bestellt wird. Das Bild der Abbildung ist die Menge aller Getränke, die von der Personengruppe bestellt wird (mindestens ein Mal). Dies ist eine Teilmenge der Getränkemenge. Zu einer Teilmenge S der Personen, also bspw. alle Frauen oder alle Männer oder alle mit großem Durst gehört die Bildmenge $\beta(S)$, die aus allen Getränken besteht, die diese Teilmenge bestellt.

Zu einer Teilmenge $T \subseteq G$ der Getränkemenge ist das Urbild $\beta^{-1}(T)$ die Menge aller Personen, deren bestelltes Getränk zu T gehört. Wenn A die alkoholischen Getränke sind und H die Heißgetränke, so ist $\beta^{-1}(A)$ die Teilmenge der Personen, die was Alkoholisches bestellt hat und $\beta^{-1}(H)$ sind die Heißgetränkeliebhaber.

Im Café ist für jede Getränkeart genau ein Zubereiter zuständig. Alle Kaffeeähnlichen Getränke werden von Bertha zubereitet, alle Cocktails von Heinz geschüttelt, für's Bier ist Claudia zuständig, etc. Dies kann man als eine Zuständigkeitsabbildung

$$\varphi : G \longrightarrow Z,\ g \longmapsto \varphi(g),$$

auffassen. Auf dem Dienstplan wird wahrscheinlich diese Abbildung dadurch beschrieben, dass zu jedem Zubereiter $z \in Z$ das Urbild $\varphi^{-1}(\{z\})$ angegeben wird, also die Teilmenge der Getränke, für die z zuständig ist. Die Zuständigkeitsabbildung ist vermutlich surjektiv, da jeder Zubereiter für mindestens ein Getränk zuständig sein sollte (wenn man mit der Gesamtpersonalmenge Z' arbeitet, sieht das anders aus). Injektiv ist sie vermutlich nicht, denn das würde bedeuten, dass jeder Zubereiter nur für ein Getränk zuständig ist. Zu einer Teilmenge T der Getränkemenge ist das Bild $\varphi(T)$ diejenige Teilmenge der Zubereiter, die genau alle Zubereiter dieser Getränketeilmenge umfasst. Zu $U \subseteq Z$ ist $\varphi^{-1}(U)$ die Teilmenge aller Getränke, deren zuständiger Zubereiter zu U gehört.

Alle Personen waren nun hoch zufrieden mit ihren Getränken und wollen über die Bedienung einen Dankesgruß an die jeweiligen Zubereiter ihrer Getränke weiterreichen. Besucher Hans war mit seinem Bier sehr zufrieden, das von Claudia ausgeschenkt wurde, deshalb möchte Hans die Claudia grüßen. Die Hintereinanderschaltung aus der Bestellungsabbildung β und der Zubereitungsabbildung φ ergibt dann die Grußabbildung

$$\gamma = \varphi \circ \beta : P \longrightarrow Z,\ p \longmapsto \varphi(\beta(p)).$$

Es gelten vielfache Beziehungen zwischen den Einzelabbildungen und der Gesamtabbildung. Bspw. gilt

$$\gamma^{-1}(\{\text{Heinz}\})\ \ \beta^{-1}(\varphi^{-1}(\{\text{Heinz}\}))\ \ \beta^{-1}(\text{Cocktails})\quad,$$

d.h., die Menge der Personen, die Heinz grüßen, ist gleich der Menge der Personen, die einen Cocktail bestellt haben. Wenn die Bestellung nicht injektiv ist, so kann auch die Grußabbildung nicht injektiv sein, die Umkehrung muss aber nicht gelten.

Lemma 1.12. *Es seien L, M, N und P, Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta : L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x).\end{aligned}$$

□

2. Vorlesung

2.1. Hintereinanderschaltung und Umkehrabbildung.

Lemma 2.1. *Es seien L und M Mengen und es sei*

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.FußnoteFußnote

(1) *F ist bijektiv.*
(2) *Es gibt eine Abbildung*

$$G : M \longrightarrow L$$

mit

$$G \circ F = \mathrm{id}_L \text{ und } F \circ G = \mathrm{id}_M \, .$$

(3) *Es gibt eine Abbildung $G : M \to L$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_L$ und es gibt eine Abbildung $H : M \to L$ mit $F \circ H = \mathrm{id}_M$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei also F bijektiv und wir müssen eine Abbildung G mit den angegebenen Eigenschaften finden. Wir behaupten, dass die Umkehrabbildung F^{-1} diese Eigenschaften erfüllt. Für jedes $x \in L$ ist $(F^{-1} \circ F)(x) = F^{-1}(F(x))$. Das Element x wird auf $F(x)$ abgebildet und es ist das einzige Element aus L mit dieser Eigenschaft. Daher ist nach Definition der Umkehrabbildung $x = F^{-1}(F(x))$. Also ist $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_L$.

Für jedes $y \in M$ ist $(F \circ F^{-1})(y) = F(F^{-1}(y))$. Nach der Definition von F^{-1} ist $F^{-1}(y)$ dasjenige Element aus L, dass von F auf y abgebildet wird. Also ist $F(F^{-1}(y)) = y$ und damit ist $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_M$. (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial,[7] da das G aus (2) sowohl die Eigenschaft von G aus (3) als auch die Eigenschaft von H aus (3) erfüllt.

[7] Das Wort „trivial“ kommt in Beweisen häufig vor, und drückt aus, dass eine (Teil-)Aussage sich von selbst versteht und dafür keine Argumentation durchgeführt wird. Lassen Sie sich von diesem Wort nicht abschrecken; als Studienanfänger braucht man eine gewisse Erfahrung mit häufig wiederkehrenden Argumentationsmustern, Beweise als trivial einschätzen und bei Bedarf selbst produzieren zu können.

(3) $\Rightarrow$ (1). Es gebe nun die Abbildungen G und H mit den beschriebenen Eigenschaften. Wir möchten zeigen, dass dann F bijektiv ist, also sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Zum Nachweis der Injektivität seien

$$x, x' \in L \text{ gegeben mit } F(x) = F(x')\,.$$

Wir wenden darauf[8] die Abbildung G an und erhalten

$$G(F(x)) = G(F(x'))\,.$$

Da $G \circ F = \mathrm{Id}_L$ ist, folgt direkt $x = x'$.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \in M$ beliebig vorgegeben. Wir behaupten, dass $H(y) \in L$ durch F auf y abgebildet wird. Dies folgt direkt aus

$$F(H(y)) \quad \mathrm{Id}_M(y) \; y \quad .$$

□

2.2. **Relationen.**

Der mathematische Begriff, um Beziehungen zwischen den Elementen von zwei Mengen zu beschreiben, heißt Relation:

Definition 2.2. Es seien M und N zwei Mengen. Eine *Relation* R zwischen den Mengen M und N ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$, also $R \subseteq M \times N$.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man häufig auch $R(x, y)$ oder xRy und sagt, dass „x in Relation R zu y steht". Typische mathematische Relationen sind: ist gleich, ist größer als, ist Teilmenge von, ist disjunkt zu, usw.

Abbildungen kann man als spezielle Relationen auffassen.

Definition 2.3. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) :\ x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graph* der Abbildung F.

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Formal kann man auch Abbildungen als Graphen (spezielle Relationen) einführen. Man muss den Graph von seiner visuellen Realisierung unterscheiden, eine solche ist nicht immer möglich und hängt davon ab, ob man die Produktmenge aus Definitionsmenge und Wertemenge gut visualisieren kann.

[8] Wenn zwei Benennungen das gleiche Element bezeichnen, so kann man darauf eine Abbildung anwenden und erhält dann eine Gleichheit in der Wertemenge, da die Abbildung den Elementen der Menge ein wohldefiniertes Element zuordnet.

Beispiel 2.4. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Dann wird auf $M \times P$ die *Inzidenzrelation* erklärt durch

$$I(x, T) \text{ genau dann, wenn } x \in T\,.$$

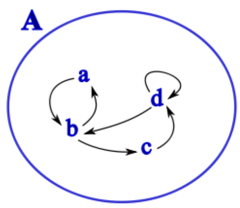
Die Inzidenzrelation drückt also aus, ob ein Element x zu einer bestimmten Teilmenge T gehört oder nicht.

2.3. **Relationen auf einer Menge.**

In den Beispielen oben hatten die beteiligten Mengen eine unterschiedliche Funktion. Wenn man aber z.B. zwischenmenschliche Beziehungen ausdrücken möchte, so stimmen die beiden Mengen überein, und es ergeben sich neuartige strukturelle Möglichkeiten, da ein Element sowohl vorne als auch hinten stehen kann. Betrachten wir in einer studentischen Dreier-WG die Relation „kann gut leiden“. Die zugehörige Relationstabelle sieht vielleicht so aus.

	Anna	Berta	Hans
Anna		x	x
Berta	x	x	
Hans	x	x	x

Hier ist zunächst wichtig, die Bedeutung der Spalte und der Zeile festzulegen; sagen wir, dass die Tabelle so zu verstehen ist, dass in der Leitspalte das grammatische Subjekt und in der Leitzeile das grammatische Objekt steht. Damit besagt die Tabelle, dass Hans alle Personen der WG gut leiden kann, dass Berta sich und Anna gut leiden kann, aber nicht Hans, und dass Anna ihre beiden Mitbewohner gut leiden kann, aber nicht sich selbst. Die Relation ist also weder „reflexiv“, da sich Anna nicht gut leiden kann, noch „symmetrisch“, da Hans zwar Berta gut leiden kann, aber nicht umgekehrt.



Ein Pfeildiagramm ist eine Möglichkeit, eine Relation darzustellen.

Definition 2.5. Eine *Relation* R auf einer Menge M ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times M$, also $R \subseteq M \times M$.

Wenn ein Paar (x, y) zu R gehört, so sagt man auch, dass x und y in der Relation R stehen. Statt $(x, y) \in R$ verwendet man häufig suggestivere Schreibweisen wie xRy oder $x \sim y$ oder $x \leq y$ Dabei werden manche Symbole nur verwendet, wenn die Relation gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Die wichtigsten Eigenschaften fasst die folgende Definition zusammen (die bei zwei verschiedenen Mengen keinen Sinn ergeben).

Definition 2.6. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Man nennt R

- *reflexiv*, wenn $(x, x) \in R$ gilt für alle $x \in M$.

- *transitiv*, wenn für beliebige $x, y, z \in M$ aus $(x, y) \in R$ und aus $(y, z) \in R$ stets $(x, z) \in R$ folgt.

- *symmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ folgt.

- *antisymmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

2.4. **Äquivalenzrelationen oder die Kunst des Identifizierens.**

Definition 2.7. Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) $x \sim x$ (*reflexiv*),
(2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*),
(3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Bei einer Äquivalenrelation R sagt man, dass x ubd y zueinander äquivalent sind, wenn xRy gilt.

Beispiel 2.8. Das Urbeispiel für eine Äquivalenzrelation ist die Gleichheit auf einer beliebigen Menge. Unter der Gleichheit ist jedes Element nur mit sich selbst äquivalent.

Beispiel 2.9. Seien M und N Mengen und sei $f : M \to N$ eine Abbildung. In einer solchen Situation hat man immer eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich M der Abbildung, und zwar erklärt man zwei Elemente $x, y \in M$ als äquivalent, wenn sie unter f auf das gleiche Element abgebildet werden, wenn also $f(x) = f(y)$ ist. Wenn die Abbildung f injektiv ist, so ist die durch f auf M definierte Äquivalenzrelation die Gleichheit. Wenn die Abbildung konstant ist, so sind unter der zugehörigen Äquivalenzrelation alle Elemente aus M untereinander äquivalent.

Beispiel 2.10. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die wie uns als ein Punktgitter vorstellen. Wir fixieren die Sprünge (Man denke an Springmäuse, die alle diese Sprünge ausführen können)

$$\pm(2, 0) \text{ und } \pm(3, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b)$, $Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von solchen Sprüngen erreichen kann (und dabei in M bleibt). Dies ist eine Äquivalenzrelation (dafür ist entscheidend, dass bei den Sprüngen auch der entgegengesetzte Sprung dazu gehört). Typische Fragestellungen sind: Wie kann man äquivalente Felder charakterisieren, wie entscheiden, ob zwei Felder äquivalent sind oder nicht? Wie viele Äquivalenzklassen gibt es überhaupt, gibt es für sie ein schönes Repräsentantensystem?

Unter der Äquivalenzrelation "erreichbar auf dem Landweg" sind Inseln und Kontinente die Äquivalenzklassen.

Beispiel 2.11. Es sei eine Situation gegeben, wo gewisse Orte (oder Objekte) von gewissen anderen Orten aus erreichbar sind oder nicht. Die Erreichbarkeit kann dabei durch die Wahl eines Verkehrsmittels oder durch eine abstraktere (Bewegungs-)Vorschrift festgelegt sein. Solche Erreichbarkeitsrelationen liefern häufig eine Äquivalenzrelation. Dass ein Ort von sich selbst aus erreichbar ist, sichert die Reflexivität. Die Symmetrie der Erreichbarkeit besagt, dass wenn man von A nach B kommen kann, dass man dann auch von B nach A kommen kann. Das ist nicht für jede Erreichbarkeit selbstverständlich, für die meisten aber schon. Die Transitivität gilt immer dann, wenn man die Bewegungsvorgänge hintereinander ausführen kann, also zuerst von A nach B und dann von B nach C.

Wenn erreichbar bspw. dadurch gegeben ist, dass man auf dem Landweg von einem Ort zu einem anderen kommen kann, so sind zwei Ortspunkte genau dann äquivalent, wenn sie auf der gleichen Insel (oder dem gleichen Kontinent) liegen. Inseln und Kontinente sind dann die Äquivalenzklassen. In der Topologie spielt der Begriff des Wegzusammenhangs eine wichtige Rolle: zwei Punkte sind wegzusammenhängend, wenn man sie durch einen stetigen Weg verbinden kann. Oder: auf den ganzen Zahlen lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es, welche Flöhe können sich begegnen?

2.5. **Äquivalenzklassen, Quotientenmenge, Identifizierungsabbildung.**

Beispiel 2.12. In der Wohnung liegt eine große Menge von Wäsche herum, der gewaschen werden soll. Natürlich kann nicht alles in den gleichen Waschgang, sondern nur Sachen, die sowohl gleichfarbig sind als auch die gleiche Waschtemperatur vertragen. Dies definiert insgesamt die Äquivalenzrelation der *Waschgangverträglichkeit*. Man kann jetzt die Wäsche dadurch sortieren, dass man waschgangverträgliche Sachen jeweils zu einem Haufen zusammenfasst. So entstehen verschiedene Haufen, die jeweils aus untereinander waschgangverträglichen Sachen bestehen, und zwei Sachen landen genau dann auf dem gleichen Haufen, wenn sie waschgangverträglich sind. Eine wichtige Beobachtung dabei ist, dass die Haufen nicht anhand einer vorgegebenen Liste (Menge) von möglichen Waschkombinationen entstehen, sondern allein durch die Verträglichkeitsüberprüfung der Objekte untereinander.

Für den weiteren Ablauf (bspw. in welcher Reihenfolge gewaschen wird) kommt es auf die Einzelsachen nicht mehr an, sondern nur noch auf die einzelnen Haufen. Es ist daher sinnvoll, die entstandene Situation dadurch zu erfassen, dass man die Menge der Haufen bildet. Jeder Haufen wird zu genau einem Element in dieser Haufenmenge. Das Sortieren kann man dann auffassen als eine Abbildung von der Wäschemenge in die Haufenmenge, wobei jedem Wäschestück der zugehörige Haufen zugeordnet wird. Bei diesem Übergang werden waschgangverträgliche Sachen miteinander identifiziert.

Definition 2.13. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und $x \in M$. Dann ist $[x] := \{y \in M\colon (x, y) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse von x* bezüglich R. Es ist $[x] \subseteq M$.

Definition 2.14. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Dann ist

$$M/R := \big\{[x]\colon x \in M\big\}$$

die *Quotientenmenge* von R.

Definition 2.15. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und X/R die Quotientenmenge. Die Abbildung $q_R\colon M \to M/R$, die $x \in M$ auf $[x] \in M/R$ abbildet, heißt *kanonische Projektion* (oder Identifizierungsabbildung) von R.

In der Sprache der Identifizierungen heißt dies: $[x]$ ist die Teilmenge aller Elemente von M, die zu x äquivalent sind. Zwei Elemente sind genau dann zu identifizieren, wenn sie der gleichen Äquivalenzklasse angehören. Die Quotientenmenge besteht aus den verschiedenen Äquivalenzklassen, d.h. die Elemente in der Quotientenmenge stehen für die möglichen Werte (Haufen, Schubladen, Klassen, Kategorien) unter der Identifizierung. Die Identifizierungsabbildung ordnet jedem Element die Klasse zu, zu der es gemäß der Identifizierung gehört. Dies wird präzisiert durch die folgende Aussage.

Lemma 2.16. *Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $[x]$, $x \in M$, und der Quotientenmenge $M/\sim$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.*

(2) *Die Identifikationsabbildung*

$$q : M \longrightarrow M/\sim,\ x \longmapsto [x],$$

ist surjektiv.

(3) *Es ist* $q^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.

Beweis. (1) Seien x und y äquivalent und $u \in [x]$. Dann ist $x \sim u$ und nach der Transitivität auch $y \sim u$, also $u \in [y]$. Damit stimmen die Äquivalenzklasssen überein. Die Implikationen von der Mitte nach rechts ist klar, da wegen $x \sim x$ Äquivalenzklassen nicht leer sind. Sei nun $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, und sei z ein Element im Durchschnitt. Dann ist $x \sim z$ und $y \sim z$ und wegen der Transitivität ist $x \sim y$.

(2) Die Surjektivität ist klar aufgrund der Definition der Quotientenmenge, und da x auf die Klasse $[x]$ geschickt wird.

(3) Es ist

$$q^{-1}(\{[x]\})\ \{y \in M :\ q(y) = [x]\}\ \{y \in M :\ [y] = [x]\}\ \{y \in M :\ y \sim x\}\ [x].$$

□

3. Vorlesung

3.1. Zählen.

Der Sekundenanzeiger einer digitalen Uhr besitzt zwei Ziffern und „zählt“ von 00 bis 59 und fängt dann wieder bei 00 an. Bei einem Countdown zählt man von 10 bis 0 und hört dann auf. Das natürliche Zählen startet bei 0 und geht in Einerschritten gegen „unendlich“. Es gibt also verschiedene Arten, zu zählen, und diese wollen wir axiomatisch erfassen mit der Zielsetzung, letztlich das natürliche Zählen zu charakterisieren.

Definition 3.1. Eine Menge M mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer (Nachfolger-)Abbildung

$$' : M \longrightarrow M,\ z \longmapsto z',$$

heißt *Zählsystem* (oder *induktives Zählsystem*), wenn das folgende *Induktionsaxiom* erfüllt ist:

Für jede Teilmenge $T \subseteq M$ gilt: wenn die beiden Eigenschaften

- $0 \in T$,
- mit jedem Element $z \in T$ ist auch $z' \in T$,

gelten, so ist $T = M$.

Das Induktionsaxiom hört sich komplizierter an, als es ist. Es fordert einfach, dass man ausgehend vom „Anfangsglied“ 0 durch sukzessives Anwenden der Nachfolgerabbildung letztlich jedes Element in der Menge M erhält. Die mengentheoretische Formulierung im Induktionsaxiom ist ein präziser Ersatz für „sukzessive“ und „letztlich“.

Das Zählen in der letzten Stelle eine digitalen Uhr ist ein Zählsystem: die zugrunde liegenden Menge ist

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

das ausgezeichnete Element ist 0, und die Nachfolgerabbildung wird (wenn wir uns hier noch nicht auf die natürlichen Zahlen berufen wollen) durch die Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

gegeben. Ausgehend von 0 erreicht man dabei jedes Element als einen sukzessiven Nachfolger, so dass das Induktionsaxiom erfüllt ist. Die Nachfolgerabbildung ist dabei eine Bijektion.

Auch die folgende Wertetabelle beschreibt ein Zählsystem.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5

Von 0 ausgehend wird jedes Element erreicht. Die Nachfolgerabbildung ist nicht injektiv, sondern sowohl 4 als auch 9 werden beide auf 5 abgebildet. Sie ist auch nicht surjektiv, da 0 keinen Vorgänger hat.

3.2. **Die Peano-Axiome.**

In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kann man zwei Elemente ihrer Größe nach vergleichen, man kann sie addieren, multiplizieren, potenzieren, teilweise abziehen, es gibt die Teilbarkeit, usw. Man kann sich nun fragen, welche Abhängigkeiten zwischen diesen mathematischen Strukturen bestehen und ob man manche davon auf andere, grundlegendere Strukturen zurückführen kann. Dies führt zum axiomatischen Aufbau der natürlichen Zahlen. Mit den Peano-Axiomen werden die natürlichen Zahlen definiert als ein induktives Zählsystem, bei dem die Nachfolgerabbildung injektiv ist und 0 kein Nachfolger ist.

Giuseppe Peano (1858 -1932)

Definition 3.2. Eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $0 \in N$ (die *Null*) und einer (Nachfolger-)Abbildung

$$' : N \longrightarrow N,\, n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Peanomodell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Peano-Axiome* erfüllt sind.

(1) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).
(2) Jedes $n \in N$ ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).
(3) Für jede Teilmenge $T \subseteq N$ gilt: wenn die beiden Eigenschaften
   - $0 \in T$,
   - mit jedem Element $n \in T$ ist auch $n' \in T$,

   gelten, so ist $T = N$.

Das heißt, dass die natürlichen Zahlen durch das natürliche Zählen bestimmt sind. Zählen heißt, von einem Startwert ausgehend, nach und nach einen Schritt (einen Strich machen, einen Stab dazulegen, einen Punkt dazumalen) weiterzuzählen. Das „Weiter"-Zählen ist also fundamentaler als eine bestimmte Benennung von Zahlen. Eine natürliche Zahl repräsentiert, wie oft bis zu ihr gezählt werden musste. Die erste Eigenschaft legt den Start fest. Die zweite Eigenschaft besagt, dass wenn zwei Zahlen verschieden sind (oder zwei endliche Mengen mit unterschiedlicher Anzahl vorliegen), dann auch die beiden jeweiligen Nachfolger verschieden sind (die beiden jeweils um ein neues Element erweiterten Mengen ebenfalls eine unterschiedliche Anzahl haben). Die dritte Eigenschaft, die man auch das *Induktionsprinzip für Mengen* nennt, besagt, dass wenn man bei null anfängt und keinen einzelnen Zählvorgang auslässt, dass man dann vollständig alle natürlichen Zahlen abzählt.

Es sei schon jetzt erwähnt, dass solche Überlegungen, die natürlichen Zahlen grundlegend zu begründen, manchmal eher verwirrend als hilfreich sein können. Bei den natürlichen Zahlen ist es erfahrungsgemäß nicht gefährlich, der Intuition zu vertrauen und mit einer naiven Vorstellung davon zu arbeiten (dies gilt für die reellen Zahlen nicht in dieser Deutlichkeit). Das ist beim Studienanfang jedenfalls wichtiger als Grundlagenfragen. Wir stellen einige Modelle für die natürlichen Zahlen vor.

Beispiel 3.3. Wir betrachten die Menge aller endlichen Strichketten, einschließlich der leeren Kette, also

$$N = \{\emptyset, |, ||, |||, ||||, |||||, \ldots\}.$$

Zwei Strichketten sind genau dann gleich, wenn sie „gleichlang“ sind.[9] Das augezeichnete Element ist $0 = \emptyset$. Die Nachfolgerabbildung ist dadurch gegeben, dass einer Strichkette n die um einen Strich verlängerte Strichkette $n|$ zugeordnet wird.

Beispiel 3.4. Wir stellen ein *Ziffernmodell* (10er Modell) für die natürlichen Zahlen vor, das die Peanoaxiome erfüllt. Das Modell beruht auf endlichen[10] Symbolketten, wobei die zugrunde gelegte Symbolmenge die Ziffernmenge

$$Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ist. In diesem Modell ist eine natürliche Zahl eine endliche, nichtleere Hintereinanderreihung von Ziffern aus Z, deren erste[11] Ziffer von der Ziffer 0 verschieden ist, es sei denn, die Gesamtkette ist die 0-Kette, die aus der einzigen Ziffer 0 besteht. Zwei solche Zahlen sind genau dann gleich, wenn die Ziffernfolgen an jeder Ziffer übereinstimmen. Die 0-Kette ist das ausgezeichnete Element.

Die Festlegung der Nachfolgerabbildung erfordert einige Vorbereitungen[12] . Zunächst wird eine Abbildung

$$Z \setminus \{9\} \longrightarrow Z,\ z \longmapsto \tilde{z},$$

durch

$$\tilde{0} = 1, \tilde{1} = 2, \tilde{2} = 3, \tilde{3} = 4, \tilde{4} = 5, \tilde{5} = 6, \tilde{6} = 7, \tilde{7} = 8, \tilde{8} = 9$$

definiert. Ferner setzten wir $\tilde{\emptyset} = 1$. Weiter wird auf der Menge der Ziffernfolgen, in denen ausschließlich die Ziffer 9 vorkommt (wobei die leere Ziffernfolge zugelassen ist) die Abbildung $c \mapsto \bar{c}$ dadurch definiert, dass jede 9 durch eine 0 ersetzt wird. Man kann nun jede erlaubte endliche Ziffernfolge z eindeutig schreiben als die Verkettung $z = abc$, wobei c eine reine (eventuell leere) Neunerfolge ist, b eine einzelne Ziffer $\neq 9$ oder leer ist, und a eine beliebige

---

[9] Das ist nicht einfach zu präzisieren; wenn man dies durch die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen zwei Strichfolgen erklärt, so landet man wieder in der Mengentheorie. Wenn man fordert, dass die Zwischenräume zwischen zwei benachbarten Strichen konstant sein müssen, so kann man Bezug auf die „geometrische Länge“ der Strichfolge nehmen.

[10] Dieser Zugang setzt also voraus, dass man endliche Mengen akzeptiert.

[11] Um von erster Ziffer reden zu können, muss man eine Reihenfolge fixiert haben. Wir gehen hier von der üblichen Reihenfolge aus.

[12] Die folgenden Festlegungen entsprechen denen für ein Computerprogramm, das die natürlichen Zahlen im Zehnersystem durchzählt.

endliche (eventuell leere) Ziffernfolge ist, die leer sein muss, wenn auch b leer ist. Mit diesen Vorbereitungen definieren wir die Nachfolgerabbildung durch

$$z' := (abc)' := a\tilde{b}\bar{c}\,.$$

Die natürliche Zahlen haben den Sinn, die Größe von zwei endlichen Mengen miteinander zu vergleichen. Wenn man von zwei Mengen feststellen möchte, ob sie „gleich groß“ sind, so braucht man dafür aber zunächst nicht die natürlichen Zahlen als „neutrale Vergleichswerte“, sondern man kann die Mengen direkt untereinander mittels bijektiven Abbildungen vergleichen. Dies führt zum Begriff der Gleichmächtigkeit.

Definition 3.5. Zwei Mengen L und M heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

gibt.

Ausgehend von der Gleichmächtigkeit von endlichen Mengen gelangt man zu einem weiteren Peano-Modell von natürlichen Zahlen als Äquivalenzklassen von endlichen Mengen, was wir hier nur kurz besprechen werden.

Beispiel 3.6. Ein Obstverkäufer verfüge über eine unendliche Menge M von qualitativ gleichwertigen Äpfeln. Wenn man zu ihm geht und zehn Äpfel bestellt, so hat der Verkäufer verschiedene Möglichkeiten, diesen Wunsch zu verwirklichen, da ja jede Teilmenge seiner Gesamtmenge diesen Wunsch erfüllt, so lange sie eben genau aus 10 Äpfeln besteht. Es sind also alle 10-elementigen Teilmengen hinsichtlich ihrer Anzahl als gleichwertig zu betrachten, auch wenn es sich um jeweils andere Äpfel handelt. Eine wichtige Beobachtung hierbei ist, dass diese Gleichmächtigkeit (Gleichanzahligkeit) zwischen Teilmengen besteht und festgestellt werden kann unabhängig davon, ob man die natürlichen Zahlen schon kennt oder nicht. Sondern zu zwei Teilmengen kann man durch direkten Vergleich untereinander feststellen, ob sie beide aus gleich vielen Äpfeln bestehen oder nicht. Diese Gleichmächtigkeit definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der endlichen Teilmengen der Gesamtmenge M.

Es gibt also zu jeder unendlichen Menge M auf der Menge $\mathcal{E}(M)$ der endlichen[13] Teilmengen von M die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit. Zu jeder endlichen Teilmenge $T \subseteq M$ besteht die zugehörige Äquivalenzklasse aus sämtlichen Teilmengen von M, die man zu T in Bijektion bringen kann, die also die gleiche Anzahl wie T besitzen. Die leere Menge ist nur zu sich

[13]Zu einer Menge kann man die *Menge der endlichen Teilmengen* darin induktiv definieren, indem man die leere Menge als endlich erklärt und jede Menge, die aus einer endlichen (schon als endlich erwiesenen) Menge durch Hinzunahme von einem weiteren Element entsteht, ebenfalls als endlich erklärt. Eine Menge ist dann selbst *unendlich*, wenn sie nicht zu ihren endlichen Teilmengen gehört.

selbst äquivalent, alle einelementigen Teilmengen sind untereinander äquivalent, etc. Die Quotientenmenge zu dieser Äquivalenzrelation, also die Menge der Äquivalenzklassen, ist ein Peano-Modell für die natürlichen Zahlen. Die durch die leere Menge $\emptyset$ bestimmte Äquivalenzklasse $[\emptyset]$ wird zum ausgezeichneten Element. Die Nachfolgerabbildung wird dadurch definiert, dass man zu einer Äquivalenzklasse $[T]$ die Menge T zu einer Menge $T' = T \cup \{x\}$ mit $x \in M$, $x \notin T$ erweitert, was möglich ist, da T endlich ist und M unendlich. Dann setzt man $[T]' := [T']$ und zeigt, dass dies unabhängig von der Wahl von x und daher eine wohldefinierte Abbildung ist. Diese Quotientenmenge bildet ein Peano-Modell für die natürlichen Zahlen.

Von nun an arbeiten wir mit einem beliebigen Peano-Modell für die natürlichen Zahlen, das wir mit $\mathbb{N}$ bezeichnen.

3.3. **Das Induktionsprinzip für Aussagen.**

Die folgende Aussage und ihr Beweis begründen das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion.*

Lemma 3.7. *(Induktionsprinzip) Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) *$A(0)$ ist wahr.*
(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Es sei
$$M = \{n \in \mathbb{N} : \ A(n) \text{ ist wahr}\} .$$
Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist
$$0 \in M .$$
Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M, dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit erfüllt M beide Voraussetzungen im Induktionsprinzip für Mengen, so dass $M = \mathbb{N}$ ist. □

Alle mathematischen Strukturen auf den natürlichen Zahlen kann man ausgehend von den Peanoaxiomen konstruieren und ihre Eigenschaften beweisen. Wir werden dies in dieser Vorlesung nur teilweise tun. Der Haupteinwand gegen eine streng durchgeführte mengentheoretisch-axiomatische Deduktion der Strukturen auf den natürlichen Zahlen aus den Peanoaxiomen heraus liegt darin, dass der Aufwand (und zwar hinsichtlich der Arbeit, der Zeit und der Konzentration) unverhältnismäßig erscheint gegenüber dem Nutzen, Strukturen zu begründen, mit denen die Studierenden seit langem wohlvertraut sind. Weiterhin ist schwer zu vermitteln, dass die Sprache der Mengen fundamentaler als die natürlichen Zahlen selbst sein soll. Allerdings ist es schon eine wichtige Erkenntnis, dass nicht alle Operationen auf den natürlichen Zahlen gleichursprünglich sind, sondern dass es zwischen ihnen Abhängigkeiten und Hierarchien gibt. Wir werden nun schrittweise die wesentlichen Strukturen auf den natürlichen Zahlen einführen und dabei parallel das passende Vokabular wie Ordnungsrelationen oder Verknüpfungen einführen.

Wir beginnen mit der Größergleichbeziehung, die wir $\geq$ schreiben. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in N$ gilt $k \geq n$, wenn man von n ausgehend durch wiederholtes Nachfolgernehmen schließlich zu k gelangt, also

$$k \geq n \text{ genau dann, wenn } k = n^{\prime\prime\prime \cdots \prime\prime\prime}.$$

Diese Definition ist intuitiv klar, aber nicht streng axiomatisch, da die angedeuteten Punkte (mengentheoretsch) unpräzise sind. Eine mengentheoretische Fundierung dieser Beziehung ist etwas aufwändig. Wir geben uns mit der obigen Einführung zufrieden, betonen aber, dass wir die Größergleichrelation auf die Nachfolgeabbildung zurückführen. Um die wesentlichen Eigenschaften der Größergleichrelation formulieren zu können, brauchen wir den Begriff der Ordnungsrelation.

3.4. **Ordnungsrelationen.**

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation nennt man eine Ordnung, wofür man häufig ein Symbol wie $\geq, \leq, \preccurlyeq, \subseteq$ verwendet.

Definition 3.8. Eine Relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $i \preccurlyeq i$ für alle $i \in I$.
(2) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ folgt stets $i \preccurlyeq k$.
(3) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq i$ folgt $i = j$.

Eine Menge mit einer fixierten Ordnung darauf heißt *geordnete Menge*. Wenn zusätzlich gilt, dass für je zwei Elemente $x \preccurlyeq y$ oder $y \preccurlyeq x$ gilt, so spricht man von einer *total geordneten Menge*.

Beispiel 3.9. Sei X eine beliebige Menge und $M = \mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge davon. Dann sind die Elemente aus $M = \mathfrak{P}(X)$ - also die Teilmengen von X - durch die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ geordnet. Die Antisymmetrie ist dabei ein wichtiges Beweisprinzip für die Gleichheit von zwei Mengen: zwei Mengen T_1, T_2 sind genau dann gleich, wenn $T_1 \subseteq T_2$ und umgekehrt $T_2 \subseteq T_1$ gilt.

Beispiel 3.10. Wir betrachten die positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}_+$ zusammen mit der Teilbarkeitsbeziehung. Man sagt, dass eine Zahl k die Zahl n teilt, geschrieben

$$k|n,$$

wenn es eine weitere natürliche Zahl m gibt mit $n = km$. Die Bezeichnung ist nicht sonderlich glücklich gewählt, da ein symmetrisches Symbol für eine nichtsymmetrische Relation verwendet wird. Die Teilbarkeitsrelation ist in der Tat reflexiv, da stets $n|n$ ist, wie $m = 1$ zeigt. Die Transitivität sieht man so: sei $k|n$ und $n|m$ mit $n = ak$ und $m = bn$. Dann ist $m = bn = bak$ und daher $k|m$. Die Antisymmetrie folgt so: aus $n = ak$ und $k = bn$ folgt $n = (ab)n$. Da wir uns auf positive natürliche Zahlen beschränken, folgt $ab = 1$ und daraus $a = b = 1$. Also ist $k = n$. Einfache Beispiele wie 2 und 3 zeigen, dass hier keine totale Ordnung vorliegt, da weder 2 von 3 noch umgekehrt geteilt wird.

3.5. **Die Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen.**

Wir kommen nun zu den natürlichen Zahlen zurück.

Lemma 3.11. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Dann ist die Größergleichrelation* $\geq$ *eine totale Ordnung.*

Beweis. Die Reflexivität und die Transitivität sind klar. Zum Beweis der Antisymmetrie sei $x \leq y$ und $y \leq x$, es gibt also endliche Nachfolgerketten α und β (also endliche Strichketten $''' \ldots '''$) mit $y = x^{\alpha}$ und $x = y^{\beta}$. Damit ist $x^{\alpha\beta} = x$, wobei $\gamma = \alpha\beta$ einfach die Hintereinanderkettung der Strichketten bedeutet. Wir haben zu zeigen, dass γ die leere Strichkette ist (dann ist auch α die leere Strichkette und somit $x = y$.). Wir zeigen durch Induktion, dass aus $x^{\gamma} = x$ folgt, dass $\gamma = \emptyset$ ist. Bei $x = 0$ wäre andernfalls $x = x^{\gamma} = (x^{\delta})'$, wobei δ aus γ dadurch entsteht, dass man einen Strich weglässt, was man kann, sobald es mindestens einen Strich in γ gibt. Doch dann wäre 0 ein Nachfolger. Sei die Aussage nun für x bewiesen und sei $x' = (x')^{\gamma}$. Dies kann man schreiben als $x' = x^{\gamma'} = (x^{\gamma})'$. Wegen der Injektivität der Nachfolgerabbildung folgt $x = x^{\gamma}$, also $\gamma = \emptyset$ nach Induktionsvoraussetzung.

Wir beweisen nun, dass die Ordnung total ist, und zwar beweisen wir durch Induktion über n die Aussage, dass für jedes $x \in \mathbb{N}$ die Aussage $x \geq n$ oder $n \geq x$ wahr ist. Bei $n = 0$ gilt die erste Alternative für jedes x und damit die Gesamtaussage. Sei nun die Aussage für n schon bewiesen und betrachten wir n' und ein beliebiges x. Nach Induktionsvoraussetzung ist $x \geq n$ oder $n \geq x$. Bei $n \geq x$ ist auch $n' \geq n \geq x$ und also $n' \geq x$ wegen der Transitivität. Sei also $n \leq x$. Bei $n = x$ sind wir wieder im ersten Fall, so dass wir also $n < x$ annehmen dürfen. Daher ist $x = n^{\alpha}$ mit einer nichtleeren Strichkette α, und damit ist x auch ein sukzessiver Nachfolger von n', also $x \geq n'$. □

Zu zwei Elementen $n, k \in N$ verwenden wir die abkürzenden Schreibweisen

$$\{k, \ldots, n\} = \{x \in N : x \geq k \text{ und } x \leq n\}.$$

Hierbei ist $k > n$ zwar erlaubt, führt aber zur leeren Menge. Besonders wichtig sind die Mengen $\{1, \ldots, n\}$, da diese die Parademengen für die n-elementigen endlichen Mengen sind.

3.6. **Zählen und endliche Mengen.**

Definition 3.12. Eine Menge M heißt *endlich* mit m Elementen, wenn es eine Bijektion

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

gibt.

Die natürliche Zahl m ist dabei eindeutig bestimmt (Aufgabe 3.11) und heißt die *Anzahl* (oder die *Kardinalität*) der Menge. Sie wird mit $\#(M)$ oder mit $|\,M\,|$ bezeichnet. Die bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

kann man eine *Nummerierung* der Menge M nennen. Eine Menge besitzt also n Elemente, wenn man sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Zwei endliche Mengen M und N, für die es eine Bijektion

$$M \longrightarrow N$$

gibt, besitzen die gleiche Anzahl. Dies beruht einfach darauf, dass diese Bijektion verknüpft mit der bijektiven Nummerierung wieder eine Bijektion ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, für die es also keine Bijektion mit $\{1, \ldots, n\}$ für kein n gibt, heißt *unendlich.*

Lemma 3.13. *Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und N eine endliche Menge mit n Elementen. Es sei $m > n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung*

$$M \longrightarrow N.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine injektive Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei $T = \varphi(M) \subseteq N$ das Bild von M unter der Abbildung φ. Dann ergibt sich eine Bijektion

$$\tilde{\varphi} : M \longrightarrow T,$$

da sich die Injektivität überträgt und da eine Abbildung immer surjektiv auf ihr Bild ist. Daher haben M und T gleich viele Elemente. Nach Aufgabe 3.12 ist die Anzahl einer Teilmenge stets kleiner oder gleich der Anzahl der Menge. Also ist $m \leq n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Die vorstehende Aussage heißt *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*). Es besagt, dass wenn man m Tauben auf n Plätze verteilt mit $m > n$, dass dann in mindestens einem Platz mindestens zwei Tauben landen.

Lemma 3.14. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F : M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

Beweis. Wir führen Induktion über die Anzahl n der beiden Mengen M und N. Bei $n = 0$ gibt es nur die leere Abbildung (von der leeren Menge in die leere Menge), und diese erfüllt alle drei Eigenschaften. Sei nun $n \geq 1$ und die Aussage für alle Mengen M mit einer Anzahl $< n$ bewiesen. Es muss lediglich die Äquivalenz von injektiv und surjektiv gezeigt werden. Sei zunächst F injektiv. Wir wählen ein Element $x \in M$ und setzen $y = F(x)$. Wir setzen

$$M' = M \setminus \{x\} \text{ und } N' = N \setminus \{y\}\,.$$

Beide Mengen haben $n-1$ Elemente, und somit kann man darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es sei

$$F' : M' \longrightarrow N',\, x \longmapsto F(x).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da wegen der Injektivität nur das Element x auf y abgebildet wird, alle anderen Elemente aus M' werden auf andere Elemente abgebildet, d.h. sie landen in N'. Die Injektivität von F überträgt sich auf die Teilmenge M'. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also F' surjektiv. Damit ist aber insgesamt F surjektiv, da einerseits y im Bild liegt (mit x als Urbild) und da andererseits jedes Element $z \neq y$ zu N' gehört und damit ein Urbild in M' besitzt.

Sei nun F surjektiv. Sei $x \in M$ beliebig und $y = F(x)$. Wir betrachten die Einschränkung

$$M' =: M \setminus \{x\} \longrightarrow N.$$

Diese Abbildung kann nicht surjektiv sein. Andernfalls würde sich nämlich der Widerspruch (hier geht auch Aufgabe 3.20 ein)

$$n \;\#(M) \;>\; \#(M \setminus \{x\}) \;\geq\; \#(F(M \setminus \{x\}))\; \#(N)\; n$$

ergeben. Daher muss y im Bild fehlen, und das heißt, dass eine surjektive Abbildung

$$M \setminus \{x\} \longrightarrow N \setminus \{y\}$$

vorliegt. Beide Mengen besitzen $n-1$ Elemente, so dass nach der Induktionsvoraussetzung hier eine Bijektion vorliegt. Damit ist auch die ursprüngliche Abbildung eine Bijektion. $\square$

4. Vorlesung

4.1. **Induktive Definition von Abbildungen.**

Lemma 4.1. *(Induktive Definition) Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen und es sei* M *eine Menge mit einem fixierten Element*[14] $s \in M$ *und einer Abbildung* $F : M \to M$. *Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M,\, n \longmapsto \varphi(n),$$

die die beiden Eigenschaften

$$\varphi(0) = s \text{ und } \varphi(n') = F(\varphi(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Beweis. Wir zeigen zuerst durch Induktion über k, dass es auf der Menge $\{0, \ldots, k\} = \{n \in \mathbb{N} : \, n \leq k\}$ eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi_k : \{0, \ldots, k\} \longrightarrow M,\, n \longmapsto \varphi_k(n),$$

gibt, die die erste Bedingung un die zweite Bedingung für alle $n < k$ erfüllt. Bei $k = 0$ besteht die Menge aus dem einzigen Element 0 und dafür legt die erste Bedingung $\varphi_0(0) = s$ die Abbildung eindeutig fest. Sei die Aussage nun für k bewiesen und betrachte k'. Es ist $\{0, \ldots, k'\} = \{0, \ldots, k\} \cup \{k'\}$ und die Bedingungen legen nach Induktionsvoraussetzung eine eindeutige Abbildung $\varphi = \varphi_k : \{0, \ldots, k\} \to M$ fest. Für das zusätzliche Element k' muss $\varphi(k') = F(\varphi(k))$ gelten, wodurch die Abbildung auch auf der größeren Menge eindeutig festgelegt ist.

Aufgrund der Eindeutigkeit gilt insbesondere, dass wenn man φ_k auf $\{1, \ldots, \ell\}$ mit $\ell \leq k$ einschränkt, sich φ_ℓ ergibt. Daher gilt auch, dass die zu konstruierende Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ eingeschränkt auf jeden Abschnitt $\{1, \ldots, k\}$ mit φ_k übereinstimmen muss. Daher setzen wir $\varphi(n) := \varphi_n(n)$, und diese Abbildung erfüllt die Eigenschaften für alle n. $\square$

Aufgrund dieser Eigenschaft kann man jetzt einfach zeigen (siehe Aufgabe 4.3), dass es zu je zwei Peanomodellen $(\mathbb{N}_1, 0_1, \prime)$ und $(\mathbb{N}_2, 0_2, \star)$ für natürliche Zahlen eine eindeutig bestimmte bijektive Abbildung

$$\mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{N}_2$$

gibt, die 0_1 in 0_2 überführt und die mit der Nachfolgeabbildung verträglich ist.

[14] Man denke bei s an Startwert.

4.2. **Verknüpfungen.**

Ausgehend von den Peano-Axiomen kann man eine Addition auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren, wobei die Nachfolgefunktion der Addition mit $1 = 0'$ entspricht. Die Definierbarkeit beruht selbst auf dem Induktionsprinzip. Ebenso kann man eine Multiplikation definieren. Beide Operationen fallen unter den Begriff der Verknüpfung, den wir nun allgemein einführen.

Definition 4.2. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Eine Verknüpfung macht also aus einem Paar

$$(x, y) \in M \times M$$

ein einziges Element

$$x \circ y \in M\,.$$

Eine Vielzahl von mathematischen Konstruktionen fällt unter diesen Begriff: die Addition, die Differenz, die Multiplikation, die Division von Zahlen, die Verknüpfung von Abbildungen, der Durchschnitt oder die Vereinigung von Mengen, etc. Als Verknüpfungssymbol kommt eine ganze Reihe in Frage, z.B. $\circ, \cdot, +, -, \oplus, \clubsuit, \heartsuit$ u.s.w.

Wichtige strukturelle Eigenschaften einer Verknüpfung werden in den folgenden Definitionen aufgelistet.

Definition 4.3. Eine Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle $x, y \in M$ die Gleichheit

$$x \circ y = y \circ x$$

gilt.

Definition 4.4. Eine Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die Gleichheit

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

gilt.

Definition 4.5. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

gegeben. Dann heißt ein Element $e \in M$ *neutrales Element* der Verknüpfung, wenn für alle $x \in M$ die Gleichheit

$$x \circ e = x = e \circ x$$

gilt.

Im kommutativen Fall muss man natürlich für das neutrale Element nur eine Reihenfolge betrachten.

Definition 4.6. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

und einem neutralen Element $e \in M$ gegeben. Dann heißt zu einem Element $x \in M$ ein Element $y \in M$ *inverses Element*, wenn die Gleichheit

$$x \circ y = e = y \circ x$$

gilt.

Bei einer Verknüpfung auf einer Menge M bezeichnet man eine (vollständige) Wertetabelle auch als *Verknüpfungstafel*. In einer solchen Tabelle stehen sowohl in der Leitzeile als auch in der Leitspalte die (linear geordneten) Elemente aus M, und in der Überkreuzungsstelle zu x und y steht der Verknüpfungswert $x \circ y$ als Eintrag. Dabei muss man festlegen, welche Ordnung zwischen den Zeilen und Spalten gilt, also ob im Kreuzungspunkt der x-ten Spalte und der y-ten Zeile $x \circ y$ oder $y \circ x$ steht. Diese Festlegung ist insbesondere wichtig, da bei Matrizen und Koordinatensystemen andere Konventionen gelten.

4.3. **Addition auf natürlichen Zahlen.**

Wir wollen die Addition auf den natürlichen Zahlen definieren, und zwar ausgehend von den Peanoaxiomen. Die Addition mit 0 soll dabei das Element wiedergeben - d.h. 0 soll das neutrale Element der Addition sein - und die Addition eines Elementes n mit $1 = 0'$ soll der Nachfolger von n sein. Die Grundidee ist dabei, die Summe $n + k$ dadurch zu definieren, dass man sukzessive den ersten Summand um eins erhöht (also den Nachfolger nimmt) und den zweiten um eins vermindert (also den Vorgänger nimmt, falls $k \neq 0$ ist). Um dies präzise durchzuführen verwenden wir obiges induktives Definitionsprinzip. Wir wenden dieses Prinzip für die Nachfolgerabbildung und für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Startglied an. Die daraus gewonnene Abbildung beschreibt das Addieren mit dieser Zahl n (es wird also die zweistellige Addition auf einstellige Operationen zurückgeführt).

Definition 4.7. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die *Addition mit* n als diejenige aufgrund von Lemma 4.1 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\alpha_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ k \longmapsto \alpha_n(k),$$

für die

$$\alpha_n(0) = n \text{ und } \alpha_n(k') = (\alpha_n(k))' \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Damit definieren wir

$$n + k := \alpha_n(k)$$

und nennen das die Addition von natürlichen Zahlen. Man beachte, dass hier die Addition in einer Weise definiert wird, in der die Kommutativität keineswegs offensichtlich ist.[15]

Lemma 4.8. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Dann gibt es genau eine Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

mit

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.4. □

Lemma 4.9. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition festgelegten Addition. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1)
$$n + 0 = n = 0 + n$$
für alle n*, d.h.* 0 *ist das neutrale Element für die Addition.*

(2)
$$n + k' = (n + k)' = n' + k$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$*.*

(3) *Die Addition ist kommutativ.*

(4) *Die Addition ist assoziativ.*

(5) *Aus einer Gleichung* $n + k = m + k$ *folgt* $n = m$ *(*Abziehregel*).*

Beweis. (1). Die Gleichung links ergibt sich direkt aus der Definition, die rechte Gleichung, also $\alpha_0(n) = n$, folgt aus einer einfachen Induktion nach n.

(2). Die linke Gleichung folgt direkt aus der Definition, die rechte besagt $\alpha_{n'}(k) = (\alpha_n(k))'$. Wir beweisen sie für beliebiges n durch Induktion über k. Bei $k = 0$ steht beidseitig n'. Sei die Aussage nun für k schon bewiesen und betrachten wir k'. Dann ist

$$\alpha_{n'}(k')\ (\alpha_{n'}(k))'\ ((\alpha_n(k))')'\ (\alpha_n(k'))'\ .$$

Für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 4.5. □

[15] Wenn man die natürlichen Zahlen einführt als Anzahlklassen zu endlichen Mengen, wie in Beispiel 3.6 beschrieben, so kann man die Summe definieren als die Anzahl einer disjunkten Vereinigung. Bei diesem Ansatz ist die Addition automatisch kommutativ, doch muss man dann an anderer Stelle mehr arbeiten.

4.4. **Multiplikation auf natürlichen Zahlen.**

Zur Definition der Multiplikation verwenden wir erneut das Prinzip der induktiven Definition. Zu einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Startwert 0 und die durch die Addition mit n definierte Abbildung $\alpha_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definition 4.10. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die *Multiplikation mit* n als diejenige aufgrund von Lemma 4.1 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\mu_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ k \longmapsto \mu_n(k),$$

für die

$$\mu_n(0) = 0 \text{ und } \mu_n(k') = \mu_n(k) + n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Damit definieren wir die Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ durch

$$n \cdot k := \mu_n(k)\,.$$

Es gilt also $n \cdot 0 = 0$ und $n \cdot k' = n \cdot k + n$. Diese beiden Eigenschaften legen bereits die Multiplikationsverknüpfung eindeutig fest.

Lemma 4.11. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

die

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.6. □

Lemma 4.12. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition festgelegten Multiplikation. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es gilt*
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.
(2) *Es gilt*
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, *d.h.* 1 *ist das neutrale Element für die Multiplikation.*
(3) *Es gilt*
$$n \cdot k' = n \cdot k + n = k' \cdot n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.
(4) *Die Multiplikation ist kommutativ.*
(5) *Die Multiplikation ist assoziativ.*

(6) *Aus einer Gleichung* $n \cdot k = m \cdot k$ *mit* $k \neq 0$ *folgt* $n = m$ *(*Kürzungsregel*).*

(7) *Für beliebige* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

(Distributivgesetz).

Beweis. Siehe Aufgabe 4.13. □

4.5. **Summen und Produktzeichen.**

Es seien nun a_i, $i = 1, \ldots, n$, $(n \geq 1)$ natürliche Zahlen (das wird später ebenso für reelle Zahlen oder Elemente in einem beliebigen Körper verwendet). Dann wird das Summen- und das Produktzeichen folgendermaßen definiert.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ und } \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \,.$$

Dies sind geschlossene und einfach zu verstehende Ausdrücke. Formal korrekter und auch beweistechnisch vorteilhaft ist es, diese Zeichen induktiv (oder *rekursiv*) durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n \text{ und } \prod_{i=1}^{n} a_i = (\prod_{i=1}^{n-1} a_i) a_n$$

zu erklären. Insbesondere sind für $n \in \mathbb{N}$ die Vielfachen durch

$$na = \sum_{i=1}^{n} a = (n-1)a + a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n-\text{mal}}$$

und die Potenzen durch

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$

definiert. Dabei gelten die Konventionen $0a = 0$ und $a^0 = 1$ (die erste lässt sich auch über die Multiplikation begründen, die zweite ist aber auch sinnvoll). [16]

Definition 4.13. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

[16]Bei einer Menge M mit einer Verknüpfung $\star$ setzt man für eine endliche Familie von Elementen $a_1, \ldots, a_n$ generell

$$\bigstar_{i=1}^{n} a_i = (\bigstar_{i=1}^{n-1} a_i) \star a_n \,.$$

Das leere $\star$-Produkt wird dabei als neutrales Element interpretiert, wenn es ein solches gibt (es gibt maximal ein neutrales Element).

Bei einer n-elementigen Menge M gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M. Gleichbedeutend damit ist, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Objekte auf n Plätze zu verteilen.

4.6. **Gruppen.**

Definition 4.14. Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto g \heartsuit h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle $f, g, h \in G$ gilt

$$(f \heartsuit g) \heartsuit h = f \heartsuit (g \heartsuit h)\,.$$

(2) Das Element e ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle $g \in G$ gilt

$$g \heartsuit e = g = e \heartsuit g\,.$$

(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit

$$h \heartsuit g = g \heartsuit h = e\,.$$

Man beachte, dass kein Kommutativitätsgesetz vorausgesetzt wird, so dass man die zweifachen Formulierungen in Teil (2) und (3) benötigt (eine Gruppe, wo zusätzlich die Kommutativität gilt, heißt *kommutative Gruppe*). Die Symbole $\heartsuit$ für die Verknüpfung und e für das neutrale Element sind willkürlich gewählt, man könnte sie auch anders nennen. Es ist aber sinnvoll, bei der abstrakten Einführung eine Bezeichnung zu wählen, die intuitiv nicht vorbelastet ist. Eine Bezeichnung wie $\cdot$ für die Verknüpfung und 1 für das neutrale Element birgt die Gefahr, dass man sich zu Schlüssen verleiten lässt, die von der Multiplikation von Zahlen her vertraut sind, die aber eventuell für eine beliebige Gruppe nicht gelten müssen.

Beispiele für Gruppen sind $(\mathbb{Z}, +, 0)$[17] (die wir in der nächsten Vorlesung einführen werden), dagegen ist $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation und ebensowenig $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ keine Gruppe. Eine Gruppe ist niemals leer, da es ja ein neutrales Element enthalten muss. Die Menge, die nur aus einem einzigen Element besteht, ist mit der einzig darin möglichen Verknüpfung und dem einzig darin möglichen neutralen Element eine Gruppe. Man spricht von der *trivialen Gruppe*. Eine weitere Gruppe ist die zweielementige Menge

$$(\{-1, 1\}, \cdot, 1)$$

mit der von $\mathbb{Z}$ bekannten Multiplikation.

In einer Gruppe ist zu einem Element $x \in G$ das Element y mit der Eigenschaft $x \circ y = e = y \circ x$ (das es aufgrund der Gruppenaxiome geben muss)

[17]Eine Gruppe wird häufig in *Tupelschreibweise* in der Form (Gruppe, Operation, neutrales Element) geschrieben.

eindeutig bestimmt. Wenn nämlich y und y' beide diese Eigenschaft besitzen, so gilt

$$y \; y \circ e \; y \circ (x \circ y') \; (y \circ x) \circ y' \; e \circ y' \; y' \quad .$$

Man beachte, dass in diesen Beweis die Bedingungen an y und y' nicht völlig symmetrisch eingehen. Diese Eindeutigkeit erlaubt es, das zu einem Gruppenelement $x \in G$ eindeutig bestimmte inverse Element als

$$x^{-1}$$

zu bezeichnen.

In der Mathematik geht es zu einem beträchtlichen Teil um die Lösung von Gleichungen, und zwar um die Existenz von Lösungen, die Berechnung von Lösungen und die Eindeutigkeit von Lösungen. Bei einer Gruppe besitzen die formulierbaren Einzelgleichungen eine eindeutige Lösung. Insofern handelt es sich bei einer Gruppe um eine besonders einfache mathematische Struktur.

Lemma 4.15. *Sei* $(G, e, \spadesuit)$ *eine Gruppe. Dann besitzen zu je zwei Gruppenelementen* $a, b \in G$ *die beiden Gleichungen*

$$a \spadesuit x = b \text{ und } y \spadesuit a = b$$

eindeutige Lösungen $x, y \in G$.

Beweis. Wir betrachten die linke Gleichung. Aus beidseitiger Multiplikation[18] mit a^{-1} (bzw. mit a) von links folgt, dass nur

$$x = a^{-1} \spadesuit b$$

als Lösung in Frage kommt. Wenn man dies einsetzt, so sieht man, dass es sich in der Tat um eine Lösung handelt. □

5. Vorlesung

Für zwei natürliche Zahlen n, m gilt $n \geq m$ genau dann, wenn man $n = m + k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ schreiben kann (siehe Aufgabe 4.12). In diesem Fall ist das k aufgrund der Abziehregel eindeutig bestimmt und heißt die *Differenz* von n und m, geschrieben $k = n - m$. Bei $n < m$ gibt es innerhalb von $\mathbb{N}$ keine Lösung für die Gleichung $n = m + x$. Innerhalb der ganzen Zahlen gibt es die negative Lösung $x = n - m$.

[18] Hier wird das Gleichheitsprinzip angewendet: wenn $x = y$ ist, so kann man beidseitig eine beliebige Abbildung φ anwenden und erhält eine neue Gleichung $\varphi(x) = \varphi(y)$. Im vorliegenden Fall ist die beidseitige Multiplikation mit einem festen Gruppenelement auch eine Abbildung.

5.1. **Die ganzen Zahlen.**

Wir wollen die ganzen Zahlen ausgehend von den natürlichen Zahlen konstruieren. Für viele Konstruktionen in der Mathematik ist der Begriff der Äquivalenzrelation entscheidend. Die Strategie ist dabei, zuerst eine „ziemlich große“ Menge zu konstruieren, die alle Elemente der beabsichtigten Menge (in aller Regel mehrfach) „repräsentiert“, und dann Elemente zu „identifizieren“, damit jedes Zielobjekt einen eindeutigen Repräsentanten bekommt.

Definition 5.1. Es seien $(M_1, \star_1)$ und $(M_2, \star_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Verknüpfung festgelegt ist. Dann heißt die auf der Produktmenge

$$M_1 \times M_2$$

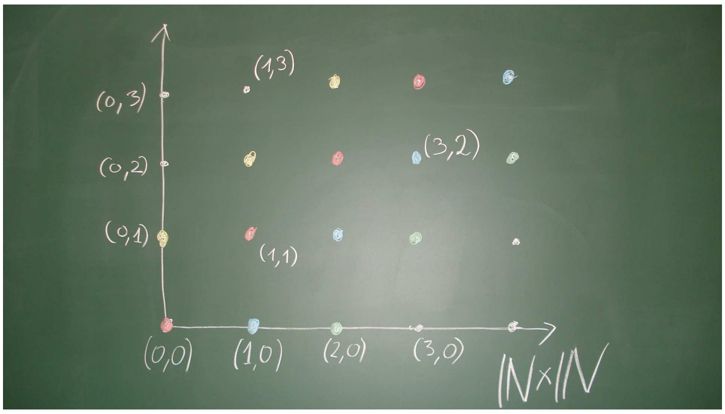
durch

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) := (x_1 \star_1 y_1, x_2 \star_2 y_2)$$

definierte Verknüpfung die *Produktverknüpfung* (oder *komponentenweise Verknüpfung*).

Dies ist ein einfacher Begriff, bspw. wird auf dem $\mathbb{R}^n$ die Vektorraumaddition komponentenweise erklärt. Eigenschaften der Einzelverknüpfungen übertragen sich direkt auf die Produktverknüpfung. Wenn bspw. beide Verknüpfungen assoziativ sind, so gilt das auch für die Produktverknüpfung. Wir verwenden den Begriff in der folgenden Konstruktion.

Beispiel 5.2. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition.[19] Wir erklären auf M eine Relation durch[20]



[19]Passende Interpretationen für die Paare in diesem Kontext sind bspw.: Das Paar (a, b) repräsentiert das Ergebnis eines Fußballspieles, wobei a die Toranzahl der Heimmannschaft und b die Toranzahl der Gastmannschaft repräsentiert, oder: Das Paar (a, b) repräsentiert das Alter eines menschlichen Paares, wobei a für das Alter der Frau und b für das Alter des Mannes steht. Der Übergang zu den Äquivalenzklassen bedeutet dann, sich nur noch für die Tordifferenz bzw. den Altersunterschied zu interessieren, nicht mehr für das genaue Ergebnis bzw. das Alter der einzelnen Personen. Man kann auch das Paar als eine Schrittfolge aus a Schritten nach rechts und b Schritten nach links ansehen.

[20]Das Paar (a, b) wird später die Differenz $a - b$ repräsentieren.

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c\,.$$

Dies ist bei $a \leq c$ genau dann der Fall, wenn es ein $e \in \mathbb{N}$ (nämlich $e = c - a$) gibt mit

$$(c, d) = (a, b) + (e, e)\,.$$

D.h. die beiden Paare unterscheiden sich um ein Diagonalelement, also um ein Paar, wo beide Komponenten übereinstimmen. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M, siehe Aufgabe 5.1. Wenn man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als ein quadratisches Gitter anordnet (das ist ein „diskretes Koordinatensystem"), so sind die Äquivalenzklassen gegeben durch die Punkte auf einer zur Diagonalen parallelen „diskreten Geraden". Die Punkte (a, b) mit $a \geq b$ sind äquivalent zu $(a-b, 0)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die zweite Komponente 0 ist. Die Punkte (a, b) mit $a \leq b$ sind äquivalent zu $(0, b-a)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die erste Komponente 0 ist. Die Punkte (a, a) sind zu $(0, 0)$ äquivalent. Den Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, bei dem mindestens eine Komponente null ist, nennen wir den *Standardvertreter* dieser Äquivalenzklasse. Die Standardvertreter sind die diskreten Punkte des begrenzenden Viertelkreuzes; zu einem Punkt ergibt sich der Standardvertreter, wenn man parallel zur Diagonalen in Richtung der Halbachsen wandert bis man auf einer der Halbachsen landet. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Standardvertreter besitzen.

Wir bezeichnen nun die Quotientenmenge, also die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation, als *Menge der ganzen Zahlen* und bezeichnen sie mit $\mathbb{Z}$. Jede ganze Zahl hat dann genau einen Standardvertreter der Form $n := (n, 0)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$, der Form $0 := (0, 0)$ oder der Form $-n := (0, n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$. Eine natürliche Zahl n fassen wir von nun an als die ganze Zahl $(n, 0)$ auf.

Wir wollen nun zwei ganze Zahlen, also zwei solche Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ und $[(c, d)]$ miteinander „addieren", also eine Verknüpfung $\oplus$ auf $\mathbb{Z}$ einzuführen. Der naheliegende Ansatz ist, diese Verknüpfung mittels der komponentenweisen Addition als

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

zu definieren. Hier tritt das Problem der *Wohldefiniertheit* auf, denn die Verknüpfung wird erklärt unter Bezug auf Repräsentanten, und es ist nicht von vornherein klar, dass unterschiedliche Repräsentanten zum gleichen Ergebnis führen. Wenn also $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$ sind, so muss man überprüfen, dass

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

und damit $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$ ist. Dies ist der Fall, siehe Aufgabe 5.2. Man kann weiterhin zeigen, dass die so definierte Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ assoziativ und kommutativ ist, dass $[(0, 0)]$ das neutrale Element der Verknüpfung ist und dass es zu jedem Element $[(a, b)]$ ein inverses Element gibt, nämlich $[(b, a)]$.

Wir definieren nun eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ durch

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)] .$$

Dies ist wieder wohldefiniert und man kann zeigen, dass die Multiplikation assoziativ und kommutativ ist mit $1 = [(1,0)]$ als neutralem Element und dass das Distributivgesetz gilt.

Um die Eigenschaften der Verknüpfungen, die wir auf den ganzen Zahlen haben, prägnant beschreiben zu können, dient der Begriff des kommutativen Ringes.

Definition 5.3. Ein *kommutativer Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (genannt *Addition* und *Multiplikation*) und mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Die Multiplikation ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung und 1 ist das neutrale Element der Multiplikation.
(3) Es gilt das *Distributivgesetz*, also

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

für alle $a, b, c \in R$.

Lemma 5.4. *Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen kommutativen Ring.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.14. □

Von nun an stellen wir uns $\mathbb{Z}$ als eine beidseitige diskrete Zahlengerade vor.

5.2. **Körper.**

Wir werden von nun an den axiomatischen Aufbau der reellen Zahlen besprechen. Diese Axiome gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Ein Körper ist ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$, bei dem zusätzlich jedes Element $x \neq 0$ ein Inverses bzgl. der Multiplikation bestizt. In der folgenden Definition werden alle Eigenschaften eines Körpers aufgeführt.

Definition 5.5. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition

   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
   (c) 0 ist das neutrale Element, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
   (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen.

Die additiven Körperaxiome kann man so lesen, dass die Menge K zusammen mit dem ausgezeichneten Element 0 und der Addition $+$ als Verknüpfung eine Gruppe bildet, die zusätzlich kommutativ ist. Ebenso bildet die Menge $K \setminus \{0\}$ (also ganz K ohne die 0) mit dem neutralen Element 1 (das wegen der expliziten Voraussetzung der Körperaxiome von 0 verschieden ist und daher zu $K \setminus \{0\}$ gehört) und der Multiplikation $\cdot$ eine (ebenfalls kommutative) Gruppe. Wenn ein Körper K vorliegt, so hat man also zugleich zwei Gruppen vorliegen, es ist aber falsch zu sagen, dass K auf zweifache Weise eine Gruppe ist, da einerseits K mit der Addition und andererseits $K \setminus \{0\}$ (und eben nicht K) eine Gruppe mit der Multiplikation bildet.

Lemma 5.6. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Dies folgt aus der allgemeinen Eindeutigkeitsaussage für inverse Elemente in jeder Gruppe, siehe die letzte Vorlesung. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element b mit $a + b = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element c mit $ac = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

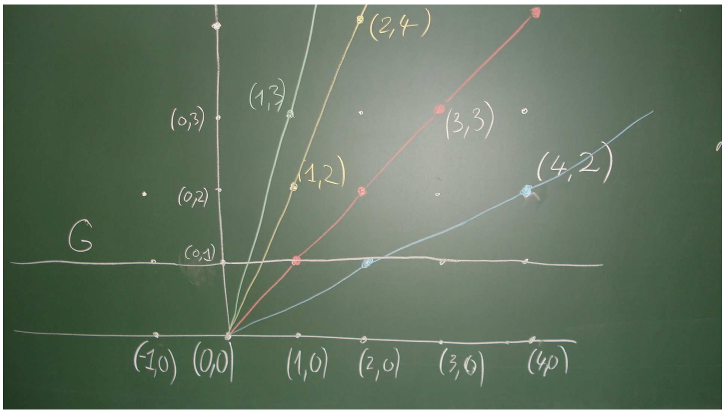
Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}\,.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

In jedem Körper findet man die natürlichen Zahlen und auch die ganzen Zahlen wieder, und zwar wird die natürliche Zahl n als die n-fache Summe von 1_K mit sich selbst in K interpretiert. Entsprechend wird die negative Zahl $-n$ als die n-fache Summe von -1_K interpretiert, siehe die Aufgaben. Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Beispiel 5.7. Wir wollen ausgehend von der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die einen kommutativen Ring bildet, die Menge der rationalen Zahlen konstruieren. Wir gehen dabei wieder ähnlich wie bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen vor, indem wir auf einer „zu großen“ Menge eine Äquivalenzrelation einführen, so dass die Quotientenmenge ein Modell für die rationalen Zahlen sind.



Wir starten mit der Produktmenge

$$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ = \{(a,b) :\ a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}_+\}\,.$$

Zur Orientierung sei schon jetzt gesagt, dass das Paar (a, b) später den Bruch a/b repräsentieren soll.[21] Auf P wollen wir eine Äquivalenzrelation definieren, wobei zwei Paare als äquivalent gelten sollen, wenn sie „den gleichen Bruch“ repräsentieren (den es noch nicht gibt). Wir definieren

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}\,.$$

Diese Relation wird also unter Bezug auf die Gleichheit in $\mathbb{Z}$ erklärt. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation, wie man direkt nachrechnen

[21]Man kann sich vorstellen, dass in (a, b) die erste Zahl eine Anzahl an Kuchen und die zweite Zahl eine Anzahl von Personen bedeutet.

kann, siehe Aufgabe 5.7. Die Quotientenmenge unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir $\mathbb{Q}$. Für die Elemente in $\mathbb{Q}$ schreiben wir vorläufig noch $[(a,b)]$.

Es ist hilfreich, sich diese Situation zu veranschaulichen, indem man die diskrete obere Halbebene[22]

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ betrachtet. Ein Paar (a,b) ist dann ein Gitterpunkt, wobei wir uns die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als die Punkte

$$(n,1),\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

vorstellen. Die zugehörige durchgezogene „Zahlengerade“ (wo also die zweite Komponente konstant 1 ist) bezeichnen wir mit G. Ein jeder Punkt $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ definiert eine eindeutige Gerade, die durch diesen Punkt und durch den Nullpunkt $(0,0)$ verläuft. In dieser geometrischen Interpretation sind zwei Punkte (a,b) und (c,d) genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Gerade definieren, und dies ist genau dann der Fall, wenn ihre „Steigungen“ übereinstimmen. Zwei Punkte liegen ja auf der gleichen Geraden genau dann, wenn sie, wenn man durch Streckung ihre zweite Koordinate zur Übereinstimmung bringt, dann auch die erste Koordinate übereinstimmt. Wenn man den ersten Punkt mit d streckt (multipliziert) und den zweiten Punkt mit b, so erhält man die beiden Punkte (da, db) und (bc, bd), und die Gleichheit vorne war die Definition für die Relation.

Auch die Identifizierungsabbildung zu dieser Äquivalenzrelation kann man sich gut vorstellen. Der Schnittpunkt der durch einen Punkt (a,b) definierten Geraden H mit der Zahlengeraden G ist ein Punkt, der dem Bruch a/b entspricht.

Wir wollen nun auf $\mathbb{Q}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren. Wir setzen[23]

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)] \text{ und } [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]\,.$$

Man muss jetzt zeigen, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, siehe Aufgabe 5.16. Sodann kann man mit einigem Aufwand nachweisen, dass $\mathbb{Q}$ mit diesen Verknüpfungen und mit den ausgezeichneten Elementen

$$0 := [(0,1)] \text{ und } 1 := [(1,1)]$$

einen Körper bilden, siehe Aufgabe 5.17. Das Negative eines Elementes $[(a,b)]$ ist $[(-a,b)]$ und das Inverse eines von null verschiedenen Elementes $[(a,b)]$ ist $[(b,a)]$ (bzw. $[(-b,-a)]$, falls a negativ ist).

Aufgrund von dieser Konstruktion können wir uns die rationalen Zahlen als Punkte auf einer Zahlgeraden vorstellen (in der Konstruktion die Geraden mit $y = 1$)

[22] Man könnte auch $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ nehmen.

[23] Die Definition der Addition kann man als Addition der Steigung sehen.

Beispiel 5.8. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bzgl. der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Lemma 5.9. *Es sei K ein Körper und seien a, b, c, a_i, b_k Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*),*
(2) $a(-b) = -ab = (-a)b$
(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*),*
(4) $a(b - c) = ab - ac,$
(5) $(\sum_{i=1}^{r} a_i)(\sum_{k=1}^{s} b_k) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*
(6) *Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. (1) Es ist $a0 \; a(0+0) \; a0 + a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)

$$(-a)b + ab \; (-a + a)b \; 0b \; 0$$

nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab.

(3) Nach (2) ist $(-a)(-b) = (-(-a))b$ und wegen $-(-a) = a$ (dies gilt in jeder Gruppe) folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 7.11.

(6) Wenn a und b von null verschieden sind, so gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1}. Wenn $ab = 0$ wäre, so ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $b^{-1}a^{-1}$ die Gleichung $1 = 0$ (wegen Teil (1)), was aber in einem Körper nicht sein kann.

$\square$

5.3. **Die Binomialkoeffizienten.**

Definition 5.10. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$.[24] Dann nennt man

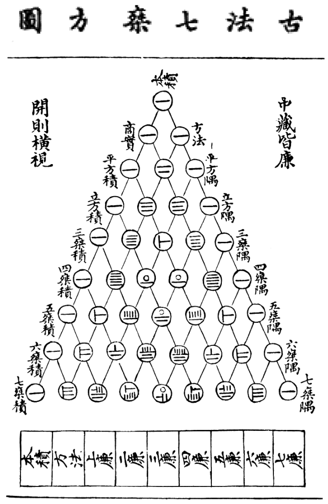
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

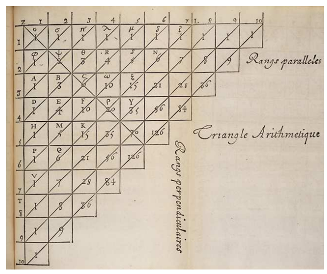
Von dieser Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich dabei um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das Dreieck der Binomialkoeffizienten war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es Yanghui-Dreieck (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das Pascalsche Dreieck (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

Lemma 5.11. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Bedingung*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 5.9. $\square$

Die folgende Formel bringt die Addition und die Multiplikation miteinander in Beziehung.

[24]Bei $k > n$ setzen wir die Binomialkoeffizienten gleich 0.

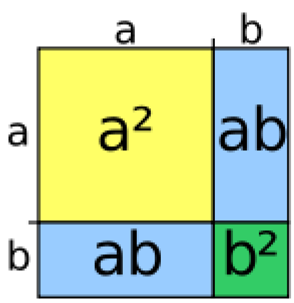
Satz 5.12. *(Binomi) Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

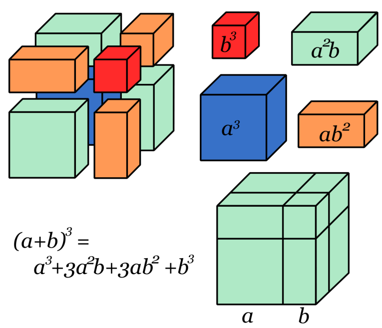
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

Beweis. □

Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Bei $n = 1$ hat man einerseits $(a+b)^1 = a+b$ und andererseits $a^1 b^0 + a^0 b^1 = a+b$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) + b\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\Big(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\Big) a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$





6. Vorlesung

6.1. Angeordnete Körper.

Definition 6.1. Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)

erfüllt.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in einem angeordneten Körper ist, dass $a \geq b$ äquivalent zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem ersten Axiom. In einem angeordneten Körper nennt man ein Element $a \in K$ *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*,[25] wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Mengen schreibt man

$$K_+,\ K_-,\ K_{\geq 0} = K_+^0,\ K_{\leq 0} = K_-^0$$

oder Ähnliches. Die wichtigsten Beispiele für angeordnete Körper sind der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Lemma 6.2. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$,
(2) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$,
(3) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.2. □

Definition 6.3. Sei K ein angeordneter Körper. Zu $a, b \in K$, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in K : x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in K : x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in K : x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in K : x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

[25] Man beachte, dass hier negativ in einem neuen Sinn auftritt. In jedem Körper K gibt zu jedem Element $x \in K$ das negative Element $-x$, also das Inverse von x bzgl. der Addition. Das Element $-x$ ist aber nicht in einem absoluten Sinn negativ, sondern nur in Bezug auf x. Dagegen gibt es in einem angeordneten Körper wirklich negative und positive Elemente.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls*, genauer spricht man von oberer und unterer Grenze. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Zutreffender (also weniger konventionsverhaftet) wäre es von „größerseitig offen“ und „kleinerseitig offen“ zu sprechen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie $(a, \infty$ verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in K ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in K : x > a\}$.

Bemerkung 6.4. Ein äquivalenter Zugang zum Begriff des angeordneten Körpers funktioniert so: Man hat einen Körper K, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ (die „positive Hälfte“) ausgezeichnet ist mit den folgenden Eigenschaften

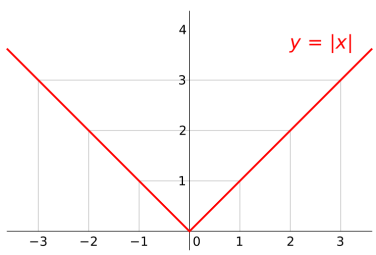
(1) Entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

In einem angeordneten Körper erfüllen die positiven Elemente diese Bedingungen. Man kann aber umgekehrt aus einem Körper mit einer solchen positiven Teilmenge einen angeordneten Körper machen, indem man

$$x \geq y \text{ durch } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

definiert, siehe Aufgabe 6.19.

6.2. **Der Betrag.**



Definition 6.5. In einem angeordneten Körper K ist der *Betrag* eines Elementes $x \in K$ folgendermaßen definiert.

$$|\, x \,| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |\, x \,|,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 6.6. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann erfüllt die Betragsfunktion*

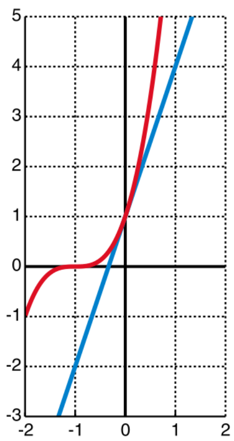
$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |\, x\,|,$$

folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|\,x\,| \geq 0$.
(2) $|\,x\,| = 0$ *genau dann, wenn $x = 0$ ist.*
(3) $|\,x\,| = |\,y\,|$ *genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.*
(4) $|\,y - x\,| = |\,x - y\,|$.
(5) $|\,xy\,| = |\,x\,||\,y\,|$.
(6) *Für $x \neq 0$ ist $|\,x^{-1}\,| = |\,x\,|^{-1}$.*
(7) *Es ist $|\,x + y\,| \leq |\,x\,| + |\,y\,|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.20. $\square$

6.3. **Bernoulli'sche Ungleichung.**



In der folgenden Aussage verwenden wir für ein Element $z \in K$ in einem Körper und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweisen

$$nz = \underbrace{z + \ldots + z}_{n-\text{mal}} \text{ und } z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n-\text{mal}}\,.$$

Satz 6.7. *(Bernoulli Ungleichung)*

Sei K ein angeordneter Körper und n eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes $x \in K$ mit $x \geq -1$ die Abschätzung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

□

6.4. **Archimedisch angeordnete Körper.**

Wenn man sich wie üblich die reellen Zahlen als Zahlengerade vorstellt, so ist das nächste Axiom selbstverständlich. Es gibt aber auch sehr interessante angeordnete Körper, in denen dieses Axiom nicht gilt; es gilt auch nicht im Rahmen der sogenannten non-standard Analysis. Zur Formulierung dieses Axioms muss man jede natürliche Zahl in einem Körper K interpretieren können. Dies geschieht, indem man einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ das Körperelement

$$n_K = \underbrace{1_K + \ldots + 1_K}_{n-\text{mal}}$$

zuordnet.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Definition 6.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem x eine natürliche Zahl n gibt mit

$$n \geq x\,.$$

Diese Eigenschaft ist für negative Elemente stets erfüllt, für positive Elemente handelt es sich aber um eine echte neue Bedingung, die nicht jeder angeordnete Körper erfüllt. Einen archimedisch angeordneten Körper kann man sich als eine *Zahlengerade* vorstellen, auf denen auch die ganzen Zahlen liegen. Mit Zahlengerade wird noch nichts genaues über „Lücken" oder „Kontinuität" behauptet.

Lemma 6.9. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es zu $x, y \in K$ mit $x > 0$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

Beweis. Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Da x positiv ist, gilt auch $nx \geq y$. □

Lemma 6.10. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper Es sei $x > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq x$.*

Beweis. Es ist x^{-1} eine wohldefinierte positive Zahl und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x^{-1}$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{n} \, n^{-1} \leq (x^{-1})^{-1} \, x \, .$$

□

Im folgenden Lemma verwenden wir, dass man zunächst die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in einem angeordneten Körper K wiederfindet und dass man dann auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in K wiederfindet. Die rationale Zahl n/m ist als das Element $n_K \cdot (m_K)^{-1}$ zu interpretieren, siehe auch Aufgabe 6.17.

Lemma 6.11. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper Dann gibt es zwischen je zwei Elementen $x < y$ auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y$$

Beweis. Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach Lemma 6.10 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\frac{1}{k} > x$ und ein $n' \in \mathbb{Z}_-$ mit $n'\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

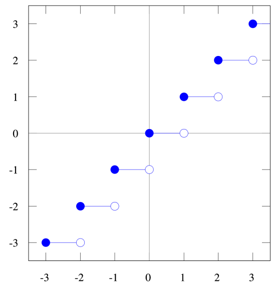
$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} \; \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x \; y$$

wie gewünscht. □

In einem archimedisch angeordneten Körper bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte Überdeckung. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 6.12. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Die *Gauß-klammer* ist die Funktion

$$[\,] : K \longrightarrow K,\; x \longmapsto [x],$$

die durch

$$[x] = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert wird.

Da die Werte der Gaußklammer die ganzen Zanheln sind, kann man die Gaußklammer auch als eine Abbildung $K \to \mathbb{Z}$ auffassen.

Lemma 6.13. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x > 1$. Dann gibt es zu jedem $B \in K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x^n \geq B\,.$$

Beweis. Wir schreiben $x = 1 + u$ mit $u > 0$. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es eine natürliche Zahl n mit $nu \geq B - 1$. Damit gilt unter Verwendung von Satz 6.7 die Abschätzung

$$x^n \;\; (1+u)^n \; \geq \; 1 + nu \; \geq \; 1 + B - 1 \;\; B.$$

□

6.5. **Tupel.**

In der Definition einer Abbildung sind die Definitionsmenge und die Wertemenge grundsätzlich gleichwichtig. Dennoch gibt es Situationen, wo mal das Hauptgewicht auf der einen oder der anderen Menge liegt. Der allgemeine Abbildungsbegriff deckt eben auch Situationen ab, bei denen man zunächst gar nicht unbedingt an Abbildungen denkt.

Betrachten wir bspw. die Potenzmenge einer Menge M. Jede Teilmenge von M kann man mit einer Abbildung von M in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ identifizieren, siehe Aufgabe 1.15. Hier ist also die Wertemenge extrem einfach und die Abbildung repräsentiert an jeder Stelle eine Ja/Nein-Entscheidung.

Andererseits kann man (geordnete) Paare (x, y) zu einer Menge M, also Elemente aus der Produktmenge $M \times M$, als eine Abbildung

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow M$$

ansehen, mit $f(1) = x$ und $f(2) = y$. Hier identifiziert man also die Abbildung mit der geordneten Aufzählung der Werte. In einer solchen Situation bezeichnet man die Abbildung häufig mit einem Symbol, das sich an den Bezeichnungen für die Elemente aus M anlehnt. Wenn man bspw. die Elemente aus M mit x bezeichnet, so schreibt man für ein Paar häufig

$$x = (x_1, x_2)$$

In der Sprache der Abbildungen ist dabei x_i der Wert der Abbildung x an der Stelle i. Die Schreibweise x_i (statt $x(i)$) suggeriert, dass das Hauptgewicht darauf liegt, was in der Wertemenge M passiert, und nicht in der Definitionsmenge.

Definition 6.14. Es seien I und M Mengen. Dann nennt man eine Abbildung

$$x : I \longrightarrow M,\ i \longmapsto x_i,$$

auch ein I- *Tupel* in M. Bei $I = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einem n- *Tupel* in M.

Die Menge I heißt in diesem Zusammenhang auch *Indexmenge*, ein Element aus der Indexmenge heißt *Index*. Bei einem I-Tupel x sind die Elemente durch die Indices indiziert. Zu $i \in I$ heißt x_i die i-te *Komponente* des Tupels. Ein n-Tupel schreibt man meist als

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Bei einer zweielementigen Indexmenge spricht man von einem *Paar*, bei einer dreielementigen Menge von einem *Tripel*.

Die Menge aller I-Tupel wird mit

$$M^I = \{f : I \to M\} = \operatorname{Abb}(I, M)$$

bezeichnet. Bei $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man auch

$$M^n = M^{\{1,\ldots,n\}} = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\text{mal}}\,.$$

Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ ist also nichts anderes als die Menge der Zweitupel von reellen Zahlen, der reelle Raum $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen reellen Tripeln.

Bei $I = \mathbb{N}$ spricht man von *Folgen* in M, worauf wir in aller Ausführlichkeit noch eingehen werden. Eine endliche Indexmenge kann man stets durch eine Menge der Form $\{1, \ldots, n\}$ ersetzen (diesen Vorgang kann man eine Nummerierung der Indexmenge nennen), doch ist das nicht immer sinnvoll. Wenn man z.B. mit einer Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ startet und sich dann für gewisse Teilindexmengen $J \subseteq I$ interessiert, so ist es natürlich, die von I

ererbten Bezeichnungen beizubehalten, anstatt J mit einer neuen Nummerierung $\{1, \ldots, m\}$ zu versehen. Häufig gibt es für ein bestimmtes Problem „natürliche“ Indexmengen, die (allein schon mnemotechnisch) einen Teil des strukturellen Gehalts des Problems widerspiegeln. Eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ wird z.B. durch eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten beschrieben, also insgesamt mit mn Einträgen. Diese Matrixeinträge indiziert man am einfachsten mit einem *Doppelindex*

$$a_{ij} ,$$

wobei der eine Index für den *Spaltenindex* und der andere für den *Zeilenindex* steht. Durch eine solche natürliche Bezeichnung ist stets der Bezug klar, und dieser würde völlig verloren gehen, wenn man eine neue Indexmenge der Form $\{1, 2, \ldots, mn\}$ einführen würde.

6.6. **Familien von Mengen.**

Es können nicht nur Elemente, sondern auch Mengen durch eine Indexmenge indiziert werden. Dann spricht man von einer Mengenfamilie.

Definition 6.15. Es sei I eine Menge und zu jedem i sei eine Menge M_i gegeben. Eine solche Situation nennt man eine *Familie von Mengen*

$$M_i \ , \ i \in I .$$

Die Menge I heißt dann die *Indexmenge* der Mengenfamilie.

Dabei können die Mengen völlig unabhängig voneinander sein, es kann aber auch sein, dass sie alle Teilmengen einer bestimmten Grundmenge sind.

Definition 6.16. Es sei M_i, $i \in I$, eine Familie von Teilmengen einer Grundmenge G. Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \in G : \, x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

der *Durchschnitt der Mengen* und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \in G : \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

die *Vereinigung der Mengen*.

Man beachte, dass dabei der Durchschnitt und die Vereinigung auf den All- bzw. den Existenzquantor zurückgeführt wird.

Definition 6.17. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$M = \prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : \, x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

die *Produktmenge* der M_i.

Sobald eine der beteiligten Mengen M_i leer ist, ist auch das Produkt leer, da es dann für die i-te Komponente keinen möglichen Wert gibt. Wenn aber umgekehrt alle Mengen M_i nicht leer sind, so ist auch ihr Produkt nicht leer, da man für jeden Index i dann ein Element $x_i \in M_i$ wählen kann. Bei einem formalen axiomatischen Aufbau der Mengentheorie muss man übrigens fordern, dass dieses Wählen möglich ist. Dies ist der Inhalt des *Auswahlaxioms*.

Beispiel 6.18. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N_n = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die mindestes so groß wie n sind. Diese ist eine durch die natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$N_n \subseteq N_m \text{ für } n \geq m\,.$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die größer/gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Beispiel 6.19. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$\mathbb{N}n = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ein Vielfaches von } n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die Vielfache von n sind. Dies ist eine durch die positiven natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N}n \subseteq \mathbb{N}m \text{ für } m \text{ teilt } n\,.$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}n$$

ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die ein Vielfaches von jeder positiven natürlichen Zahl ist.

Beispiel 6.20. Es sei x eine reelle Zahl[26] und es sei x_n diejenige rationale Zahl, die sich aus allen Vorkommaziffern und den ersten n Nachkommaziffern von x im Dezimalsystem ergibt. Wir definieren die Intervalle

$$M_n = [x_n, x_n + (\frac{1}{10})^n] \subset \mathbb{R}\,.$$

Dies sind Intervalle der Länge $(\frac{1}{10})^n$ und es ist

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\,.$$

Die Familie M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist also eine *Intervallschachtelung* für x.

[26] Die reellen Zahlen werden wir später axiomatisch einführen, Intervallschachtelungen repräsentieren ein wichtiges Existenzprinzip für reelle Zahlen.

Beispiel 6.21. Es sei M eine Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv[27]

$$M_0 = M \text{ und } M_n = \mathfrak{P}\,(M_{n-1}) \text{ für } n \geq 1\,.$$

Man nimmt also jeweils von der Vorgängermenge die Potenzmenge. Ein Element aus dem Produkt

$$(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

besteht also in der nullten Komponenten aus einem Element aus M, in der ersten Komponenten aus einer Teilmenge von M, in der zweiten Komponenten aus einer Menge von Teilmengen von M usw. Zwischen den einzelnen Mengen aus der Familie besteht keine Inklusionsbeziehung.

7. Vorlesung

7.1. Folgen in einem angeordneten Körper.

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

Beispiel 7.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. In jedem angeordneten Körper K gibt es eine 5, ob es aber ein solches x gibt ist eine nichttriviale zusätzliche Eigenschaft von K. Wenn es in K eine solches x gibt, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nicht geben, siehe Aufgabe 7.2, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzeln beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h. die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a = x_0 = 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$, wobei diese Ungleichung (zunächst) nur Sinn macht, wenn x in K existiert. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt, und zwar unabhängig davon, ob $\sqrt{5}$ zu K gehört oder

[27] Es wird also eine Definition unter Bezug auf einen Vorgänger gemacht.

nicht, solange nur a dazu gehört. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 5/2 liegt. Man nimmt das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 \quad \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} \quad \frac{9}{4} \quad .$$

Wegen $(\frac{9}{4})^2 \ \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 \quad \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} \quad \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Appproximation von $\sqrt{5}$.

Heron von Alexandria
(1. Jahrhundert n.C.)

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 7.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$x_1^2 - c \ (\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2})^2 - c \ \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c \ \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} \ (\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2})^2.$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2} \, .$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $(\frac{c}{x_n})^2 \leq c$ ist.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n ein Element in K, das eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 7.3. Sei K ein angeordneter Körper. Eine *Folge in K* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow K,\, n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge (nicht nur in einem angeordneten Körper), für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche topologische Struktur, wie sie in einem angeordneten Körper existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

Definition 7.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

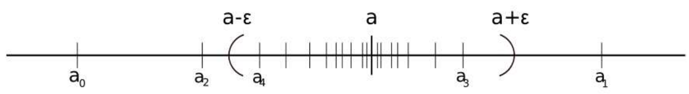
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x\,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), anderfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar stabil zu erreichen, dass alle folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner die Zielgenauigkeit, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand.

Zu einem $\epsilon > 0$ und $x \in K$ nennt man das Intervall $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ auch die *ϵ-Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



Lemma 7.5. *Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann besitzt x_n maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d =| x-y |> 0$. Wir betrachten $\epsilon = d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$| x_n - x | \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

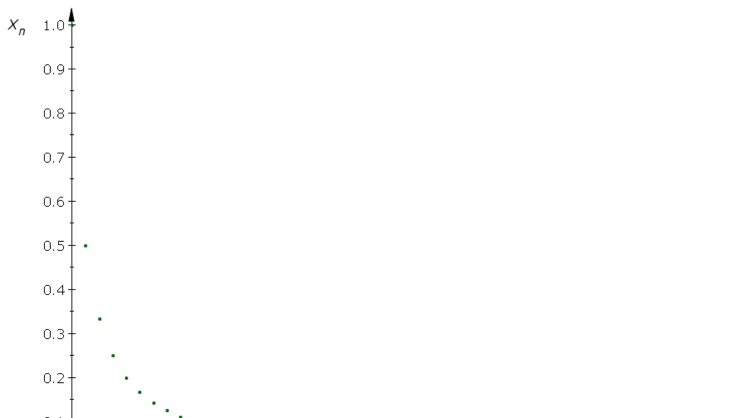
und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$| x_n - y | \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' \,.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d \;\; | x-y | \leq | x - x_n | + | x_n - y | \leq \; \epsilon + \epsilon \;\; 2d/3.$$

$\square$



Beispiel 7.6. Eine *konstante Folge* $x_n = c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$| x_n - c | \;\; | c - c | \;\; | 0 | \;\; 0 \; < \; \epsilon$$

für alle n.

Es sei nun K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus folgt $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n \, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon \, .$$

7.2. **Beschränktheit.**

Definition 7.7. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge.

(1) Ein Element $S \in K$ heißt eine *obere Schranke* für M, wenn $x \leq S$ gilt für alle $x \in M$.
(2) Ein Element $s \in K$ heißt eine *untere Schranke* für M, wenn $x \geq s$ gilt für alle $x \in M$.
(3) M heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke für M existiert.
(4) M heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke für M exisitiert.
(5) M heißt *beschränkt*, wenn M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
(6) Eine obere Schranke T von M heißt das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.
(7) Eine untere Schranke t von M heißt das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.
(8) Das Supremum T von M heißt *Maximum*, wenn $T \in M$ ist.
(9) Das Infimum t von M heißt *Minimum*, wenn $t \in M$ ist.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn S eine obere Schranke ist, so ist auch jede größere Zahl eine obere Schranke. Für das offene Intervall $]0, 1[$ ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu gehört. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für die Folge $1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

Lemma 7.8. *Es sei K ein angeordneter Körper. Wenn eine Folge in K konvergent ist, so ist sie auch beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in K$ und es sei ϵ ein beliebiges positives Element. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B = \max_{n<n_0}\{|x_n|, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Dies ist eine Schranke für alle $|x_n|$. □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

Beispiel 7.9. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $c \in K$, $c \neq 0$. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n = (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| \ |(-1)^n||c| \ |c| \quad .$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich $x \geq 0$ der Grenzwert. Dann gilt für positives $\epsilon < |c|$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| \ \ c + x \ \geq \ c \ > \ \epsilon \ ,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

7.3. **Rechenregeln für Folgen.**

Lemma 7.10. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n) .$$

(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n) .$$

(3) *Für $c \in K$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c x_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n) .$$

(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} .$$

(5) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $(\frac{y_n}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x} .$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere beschränkt und daher exisitiert ein D mit $\mid x_n \mid \leq D$. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C = \max\{D, \mid y \mid\}$. Daher gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$\mid x_n - x \mid \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } \mid y_n - y \mid \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2 \,.$$

$n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} \mid x_n y_n - xy \mid &= \mid x_n y_n - x_n y + x_n y - xy \mid \\ &\leq \mid x_n y_n - x_n y \mid + \mid x_n y - xy \mid \\ &= \mid x_n \mid \mid y_n - y \mid + \mid y \mid \mid x_n - x \mid \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht null ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $\mid x_n \mid \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$\mid x_n - x \mid \leq \frac{\epsilon \mid x \mid^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2 \,.$$

Dann gilt für alle $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\mid \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \mid \mid \frac{x_n - x}{x x_n} \mid \quad \frac{1}{\mid x \mid \mid x_n \mid} \mid x_n - x \mid \leq \frac{2}{\mid x \mid^2} \cdot \frac{2 \mid x \mid^2}{2} \epsilon.$$

□

Lemma 7.11. *Es sei* K *ein angeordneter Körper und es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen mit* $x_n \geq y_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.9. □

Lemma 7.12. *(Quetschkriterium)*

Es sei K *ein angeordneter Körper und es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *drei Folgen in* K. *Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert* a. *Dann konvergiert auch* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen diesen Grenzwert* a.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.10. □

Definition 7.13. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann heißt die Folge *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

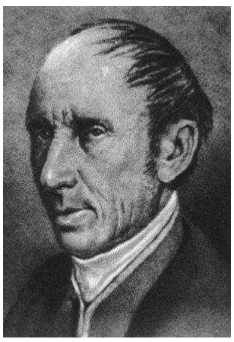
Als gemeinsamen Begriff für waschsende oder fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Das hängt vom angeordneten Körper ab! Innerhalb der rationalen Zahlen sind bspw. die mit dem Heronverfahren konstruierten Folgen monoton wachsend (wenn man mit einem zu kleinen Startwert anfängt) und auch beschränkt (durch jede rationale Zahl, deren Quadrat größer als a ist), sie besitzen aber im Allgemeinen keinen Limes in $\mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, denen wir uns in der nächsten Vorlesung zuwenden, sind gerade dadurch ausgezeichnet, dass darin jede wachsende, nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt.

8. Vorlesung

8.1. **Cauchy-Folgen.**

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man bspw. die durch das baybylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, in dem $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 8.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Lemma 8.2. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$ gilt.*

Beweis. Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die zweite Bedingung gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein n_0 derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon/2$. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| \leq \ \epsilon/2 + \epsilon/2 \ \epsilon \ ,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. □

Satz 8.3. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 \, .$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \ \ \epsilon/2 + \epsilon/2 \ \epsilon \ .$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Definition 8.4. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Lemma 8.5. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 ein $m > n_0$ gibt mit $x_m - x_{n_0} \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_0 = 0\,,$$

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon\,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon\,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedes Axioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_0\,.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_0 &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \ldots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

8.2. **Der Körper der reellen Zahlen.**

Definition 8.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Er heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Konvergenzpunkt besitzt).

Definition 8.7. Einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper nennt man *Körper der reellen Zahlen*. Er wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen sind also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen vollständig und archimedisch angeordnete Körper sind, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen Isomorphismus).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Dies wird im folgenden Beispiel und in den Aufgaben durchgeführt.

Beispiel 8.8. Wir konstruieren, ausgehend von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper, also ein Modell für den Körper der reellen Zahlen. Es sei

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{Cauchyfolge in } \mathbb{Q}\}$$

die Menge aller Cauchyfolgen mit rationalen Werten. Wir definieren in C eine Relation durch

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ falls } (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine Nullfolge ist}.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation, siehe Aufgabe 8.9. Wir definieren nun die Quotientenmenge unter dieser Relation als reelle Zahlen, also

$$\mathbb{R} = C/\sim .$$

Unter dieser Identifzierungsabbildung werden also alle Nullfolgen zu null gemacht, und zwei rationale Folgen werden miteinander identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Wir schreiben die zugehörigen Äquivalenzklassen als $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Auf C gibt es die gliedweise Addition und Multiplikation. Auf der Quotientenmenge führt dies zum Ansatz

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \text{ und } [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$, siehe Aufgabe 8.10. Durch die konstanten Folgen zu einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ergibt sich eine Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto (q)_{n\in\mathbb{N}},$$

die mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist. Mit diesen Operationen und mit 0 und 1 (also der konstanten Nullfolge und der konstanten Einsfolge) ist $\mathbb{R}$ ein Körper, siehe Aufgabe 8.17.

Für jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt die ausschließende Alternative: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, oder es gibt ein $q > 0$ mit $x_n \geq q$ für fast alle[28] $n \in \mathbb{N}$, oder es gibt ein $q < 0$ mit $x_n \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Darauf aufbauend kann man $\mathbb{R}$ in null, in positve und in negative reelle Zahlen einteilen bzw. eine (totale) Ordnungsrelation darauf definieren. Damit wird $\mathbb{R}$ zu einem angeordneten Körper, der auch archimedisch ist, siehe Aufgabe 8.18. In einem letzten Schritt kann man zeigen, dass $\mathbb{R}$ auch vollständig ist, siehe Aufgabe 8.19.

Statt von einem vollständig und archimedisch angeordneten Körper werden wir von nun an von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sprechen. Als Beweismittel sind aber lediglich die genannten Axiome erlaubt.

8.3. **Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen.**

Satz 8.9. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum.*

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$

[28]Das bedeutet für alle bis auf endlich viele.

wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, \text{ falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, \text{ falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq (\frac{1}{2})^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, handelt es sich nach Lemma 8.5 um eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit besitzt die konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist, eine Cauchy-Folge mit demselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ angenommen für ein $z \in M$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Korollar 8.10. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 8.5 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. □

Definition 8.11. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in K heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

gegen null konvergiert.

Satz 8.12. *(Intervallschachtelung) Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 8.10. □

Definition 8.13. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N .$$

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N .$$

9. Vorlesung

9.1. Die eulersche Zahl e.

Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl e*.

Lemma 9.1. *Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen*

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \text{ und } b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n \, < \, a_n(1 + \frac{1}{n}) \; b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aufgrund Satz 6.7 gilt

$$(1 - \frac{1}{n^2})^n \, \geq \, 1 - n \frac{1}{n^2} \;\; 1 - \frac{1}{n} \quad .$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \, \leq \, (\frac{n^2 - 1}{n^2})^n \;\; (\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n})^n \;\; (\frac{n+1}{n})^n (\frac{n-1}{n})^n \, .$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $(\frac{n}{n-1})^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} \, (\frac{n}{n-1})^{n-1} \, \leq \, (\frac{n+1}{n})^n \; a_n \, .$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{1}{n} \quad .$$

Daraus folgt

$$1+\frac{1}{n} \leq (\frac{n^2}{n^2-1})^n \; (\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1})^n \; (\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n+1})^n \; .$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $(\frac{n+1}{n})^n$ ergibt sich

$$b_n \; (\frac{n+1}{n})^{n+1} \leq (\frac{n}{n-1})^n \; b_{n-1} \; .$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllänge. Diese ist

$$b_n - a_n \;\; a_n(1+\frac{1}{n}) - a_n \;\; a_n\frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergiert somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. □

Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 8.12 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 9.2. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n\mapsto\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Wir werden bei der Behandlung der Exponentialfunktion auf die eulersche Zahl zurückkommen und einer andere Beschreibung dafür kennenlernen. Ihr nummerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\ldots \,.$$

9.2. **Die komplexen Zahlen.**

In dieser Vorlesung führen wir aufbauend auf die reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlbereiche zur Verfügung. Die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen war einigermaßen kompliziert, obwohl die reellen Zahlen scheinbar vertraut sind. Dagegen ist die Einführung der komplexen Zahlen einfach, obwohl sie zunächst nicht vertraut aussehen.

Definition 9.3. Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponetenweisen Addition und der durch

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im $\mathbb{R}^2$, während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar nummerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden später noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennen lernen.

Lemma 9.4. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.5. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + bi = (a,b)\,.$$

Insbesondere ist $i = (0,1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$i^2 = -1\,.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So sollte man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$(a+bi)(c+di) \quad ac+adi+bic+bidi \quad ac+bdi^2+(ad+bc)i \quad ac-bd+(ad+bc)i\ .$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0i = (a,0)$ auf. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert, siehe Aufgabe 9.4 .

Definition 9.5. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

heißt

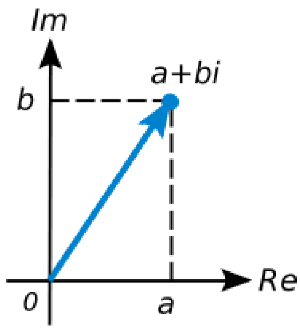
$$\mathrm{Re}\,(z) = a$$

der *Realteil* von z und

$$\mathrm{Im}\,(z) = b$$

heißt der *Imaginärteil* von z.

Man sollte sich allerdings die komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlsysteme sind. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.



Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gaussschen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

Lemma 9.6. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus $\mathbb{C}$).*

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)i$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

(5) *Es ist $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.7. $\square$

Definition 9.7. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi$$

heißt *komplexe Konjugation.*

Zu z heißt $\overline{z}$ die *konjuguiert-komplexe Zahl* von z. Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

Lemma 9.8. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) *Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.*
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ *genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.13. □

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* $\sqrt{c}$, siehe Aufgabe 8.7. Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

Definition 9.9. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

ist der *Betrag* definiert durch

$$|\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satz des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 = (0, 0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ z \longmapsto |\, z \,|\ .$$

Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis.* Die Zahlen auf dem komplexen Einheitskreis stehen durch die *eulersche Formel* in Beziehung zur komplexen Exponentialfunktion und zu den trigonometrischen Funktionen. Darauf kommen wir in einigen Wochen zurück. Schon jetzt sei aber erwähnt, dass das Produkt von zwei komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis sich ergibt, indem man die zugehörigen Winkel, gemessen von der positiven reellen Achse aus gegen den Uhrzeigersinn, addiert.

Lemma 9.10. *Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.*

(1) $|\, z\,|= \sqrt{z\ \overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) *Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.8. □

Lemma 9.11. *Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.*
(2) *Es ist $|\, z\,|= 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.*
(3) $|\, z\,|=|\,\overline{z}\,|$
(4) $|\, zw\,|=|\, z\,||\, w\,|$.
(5) $\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z) \leq |\, z\,|$.
(6) $|\, z + w\,|\leq|\, z\,| + |\, w\,|$.
(7) *Für $z \neq 0$ ist $|\, 1/z\,|= 1/\, |\, z\,|$.*

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 9.9 . Zunächst gilt nach (5) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\mathrm{Re}\,(u) \leq|\, u\,|$. Daher ist

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq|\, z\,||\, w\,|\,,$$

und somit ist

$$\begin{array}{rcl} |\, z + w\,|^2 & & (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ & & z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ & & |\, z\,|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |\, w\,|^2 \\ & \leq & |\, z\,|^2 + 2\,|\, z\,||\, w\,| + |\, w\,|^2 \\ & & (|\, z\,| + |\, w\,|)^2 \end{array}$$

.

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Gleichung. □

9.3. **Quadratwurzeln von komplexen Zahlen.**

Die imaginäre Einheit i hat die wichtige Eigenschaft $i^2 = -1$. Das Negative von i besitzt die gleiche Eigenschaft, nämlich $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Damit gibt es zu jeder negativen reellen Zahl $-c$ (mit c positiv) in $\mathbb{C}$ die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{c}i$ und $-\sqrt{c}i$. Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass nicht nur jede reelle Zahl in $\mathbb{C}$ eine Quadratwurzel besitzt, sondern überhaupt jede komplexe Zahl.

Beispiel 9.12. Es sei $z = a+bi$ eine komplexe Zahl. Dann hat die komplexe Zahl

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\sqrt{|\,z\,| + a} + i\sqrt{|\,z\,| - a})$$

mit dem Vorzeichen

$$\sigma = \begin{cases} 1, \text{ falls } b \geq 0 \\ -1 \text{ falls } b < 0 \,. \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$u^2 = z \,.$$

Insbesondere besitzt also z zwei Quadratwurzeln, nämlich u und $-u$, die bei $z = 0$ zusammenfallen.

Wir zeigen dies für den Fall $b > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u^2 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\,z\,| + a} + i\sqrt{|\,z\,| - a}))^2 \\
&= \frac{1}{2}(|\,z\,| + a - (|\,z\,| - a) + 2i(\sqrt{(|\,z\,| + a)(|\,z\,| - a)}) \\
&= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{|\,z\,|^2 - a^2}) \\
&= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{b^2}) \\
&= \frac{1}{2}(2a + 2ib) \\
&= a + bi.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass innerhalb von $\mathbb{C}$ jede *quadratische Gleichung*

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, mindestens eine komplexe Lösung besitzt, siehe Aufgabe 9.14.

Ein wichtiger Satz, der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, dass überhaupt jede polynomiale Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$ besitzt. D.h., dass jedes nichtkonstante Polynom über den komplexen Zahlen eine Nullstelle besitzt. Diesen Satz können wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht beweisen.

10. Vorlesung

Die Vorlesungen der nächsten Wochen beschäftigen sich mit *linearer Algebra*. Ihr zentraler Begriff ist der Vektorraum.

10.1. **Vektorräume.**

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel.

An einem Weihnachtsstand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \; G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \; G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum, und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den Geschmack trifft, der Wunschglühwein hat die Zusammensetzung

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$[29] derart, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c, wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.

[29] Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.

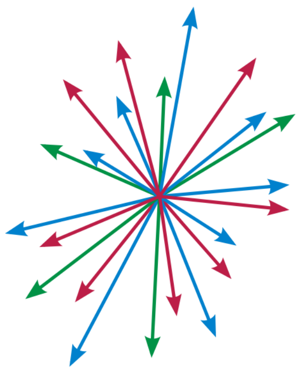
Definition 10.1. Sei K ein Körper und $V = (V, +, 0)$ eine kommutative Gruppe. Man nennt V einen K- *Vektorraum*, wenn eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v\,,$$

erklärt ist, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v \in V$ beliebig)

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u + v) = ru + rv$,
(3) $(r + s)u = ru + su$,
(4) $1u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werdem, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 10.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Beispiel 10.3. Der *Anschauungsraum* (oder die Ebene), wie man ihn sich elementargeometrisch vorstellt, ist kein Vektorraum! Weder gibt es in ihm eine natürliche 0 noch kann man zwei Punkte darin miteinander addieren oder einen Punkt mit einer Zahl multiplizieren. Dies sieht anders aus, wenn man nicht den Anschauungsraum betrachtet, sondern alle möglichen *Parallelverschiebungen* im Anschauungsraum. Eine solche elementar-geometrische Verschiebung verschiebt jeden Punkt in eine bestimmte, für alle Punkte gleiche Richtung. Eine solche Verschiebungsrichtung kann man sich als einen Pfeil vorstellen. Die Menge der Parallelverschiebungen kann man in natürlicher Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ machen. Der Nullvektor ist dann die Nullverschiebung, die also nichts verschiebt, sondern jeden Punkt an seinem Ort lässt. Die Addition von Verschiebungen ist die Hintereinanderausführung der Verschiebungen. Sie wird beschrieben, indem man das Ende des einen Verschiebungspfeils an die Spitze des anderen Verschiebungspfeils anlegt und den Gesamtpfeil betrachtet. Diese Verknüpfung ist kommutativ (Parallelogramm). Die Multiplikation mit einer positiven Zahl ist dann die Streckung oder Stauchung der Verschiebung um den als Skalar gegebenen Faktor, die Multiplikation mit einer negativen Zahl ist dann die Streckung oder Stauchung in die andere Richtung. Insbesondere ist das Negative einer Verschiebung die *entgegengesetzte Verschiebung.*

Wenn man allerdings im Anschauungsraum einen Punkt als *Ursprungspunkt* (oder *Nullpunkt*) auszeichnet, so kann man jeden Punkt mit dem Verbindungspfeil vom Ursprung zu diesem Punkt identifizieren und erhält dann eine Vektorraumstruktur auf dem Anschauungsraum.

Beispiel 10.4. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Gruppe gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $\lambda = (\lambda, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 10.5. Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Menge der Folgen in K, also

$$V = \{x | \, x : \mathbb{N} \to K \text{ Abbildung}\} .$$

Dise ist mit komponentenweiser Addition, bei der also die Summe von zwei Folgen x und y durch

$$(x + y)_n := x_n + y_n$$

erklärt wird, und mit der durch

$$(\lambda x)_n := \lambda x_n$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die Inklusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Mit der reellen Addition und mit der Multiplikation von rationalen Zahlen mit reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie direkt aus den Körperaxiomen folgt. Dies ist ein ziemlich unübersichtlicher Vektorraum.

Vor dem nächsten Beispiel führen wir Polynome über einem Körper ein.

Definition 10.7. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Ein Polynom P definiert eine *Polynomfunktion*

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Der Wert dieser Funktion an der Stelle x ergibt sich also dadurch, dass man die Variable X überall durch das Körperelement x ersetzt. Achtung! Bei endlichen Körpern können verschiedene Polynome die gleiche Polynomfunktion definieren, so dass man zwischen Polynom und Polynomfunktion unterscheiden muss.

Beispiel 10.8. Sei $R = K[X]$ die Menge aller Polynome in einer Variablen über dem Körper K. Man definiert eine Addition auf R, indem man zu zwei Polynomen

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

folgendermaßen vorgeht. Es sei $n = \max(n, m)$. Man kann dann Q als eine Summe schreiben, die bis n läuft, indem man die dazu benötigten Koeffizienten b_i, $i > m$, gleich null setzt. Damit definiert man die Summe komponentenweise, also

$$P + Q \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \ \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \, .$$

Desweiteren kann man ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit einem Skalar $\lambda \in K$ multiplizieren, indem man

$$\lambda P := \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$$

setzt. Man kann einfach nachprüfen, dass mit diesen Operationen ein Vektorraum vorliegt.

Lemma 10.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $\lambda \in K$) .*

(1) *Es ist* $0v = 0$. [30]
(2) *Es ist* $\lambda 0 = 0$.
(3) *Es ist* $(-1)v = -v$.
(4) *Aus* $\lambda \neq 0$ *und* $v \neq 0$ *folgt* $\lambda v \neq 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.9. □

10.2. **Erzeugendensysteme und Untervektorräume.**

Definition 10.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \text{ mit } a_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(a_1, \ldots, a_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 10.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ darstellen kann als

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $\lambda_j \in K$.

Definition 10.12. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn gilt

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $\lambda \in K$ ist auch $\lambda u \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 10.. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Definition 10.13. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \{\sum_{i \in J} c_i v_i |\, c_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge}\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten* Untervektorraum.

[30]Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[31] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn gilt $w = \lambda v$, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 10.14. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum. Er stimmt mit dem Durchschnitt*
$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum}, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$
überein.

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*
$$\langle v_i, \, i \in I \rangle = V$$
ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.5. □

Beispiel 10.15. Es sei K ein angeordneter Körper und sei
$$V = \{x \mid x : \mathbb{N} \to K \text{ Abbildung}\}$$
die Menge der Folgen in K (siehe Beispiel 10.5). Dann sind die beiden Teilmengen
$$U = \{x \in V \mid x \text{ konvergiert in } K\}$$
und
$$C = \{x \in V \mid x \text{ ist Cauchy-Folge}\}$$
Untervektorräume von V mit $U \subseteq C$. Die erste Aussage folgt aus Beispiel 10.5 (1),(3), für die zweite Aussage siehe Lemma 7.10.

[31]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus Definition 10.13 ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

10.3. **Lineare Gleichungssysteme und Elimination.**

Definition 10.16. Es sei K ein Körper und $a_1, \dots, a_n \in K$. Dann nennt man

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

eine *lineare Gleichung* in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ zu den Koeffizienten a_j, $j = 1, \dots, n$. Ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung der linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j\xi_j = 0$ ist.

Wenn $c \in K$ ein weiteres Element ist, so heißt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

eine *inhomogene lineare Gleichung* und ein Tupel $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung der inhomogenen linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j\zeta_j = c$ ist.

Definition 10.17. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein *lineares Gleichungungssystem* in den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ ist für alle $i = 1, \dots, m$.

Wenn $(c_1, \dots, c_m) \in K^n$ beliebig[32] ist, so heißt

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung der inhomogenen linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\zeta_j = c_i$ ist für alle i.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \dots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht nicht unbedingt eine Lösung haben. Solche Gleichungssysteme treten immer wieder auf.

Beispiel 10.18. Es sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Im K^m seien n Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

[32] Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

gegeben und sei

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix}$$

ein weiterer Vektor. Wir wollen wissen, wann w sich als Linearkombination der v_j darstellen lässt. Es geht also um die Frage, ob es m Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix} .$$

Die Gleichheit von Vektoren bedeutet, dass Übereinstimmung in jeder Komponenten vorliegen muss, so dass dies zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n & = & c_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n & = & c_m \end{array}$$

führt.

Lemma 10.19. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 10.7. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere addiert man zwei lineare Gleichungen, indem man die zu einer Variablen gehörenden Koeffizienten jeweils miteinander addiert. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Dennoch gibt es auch dafür eine sinnvolle Addition, wobei man wieder die Koeffizienten zu den Variablen, aber auch die inhomogenen Koeffizienten miteinander addieren muss.

Definition 10.20. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsräume übereinstimmen.

Die Äquivalenz von linearen Gleichungssystemen ist eine Äquivalenzrelation. Eine naheliegende Aufgabe ist es, zu einem linearen Gleichungssystem ein möglichst einfaches äquivalentes Gleichungssystem zu finden, und dieses dann zu „lösen“.

Lemma 10.21. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einen Skalar $\lambda \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen von einer Nullzeile.*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x_i = \lambda c$$

gilt für jedes $\lambda \in K$. Bei $\lambda \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit λ^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d\,.$$

Wenn ein Tupel $(\xi, \ldots, \xi_n)$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. $\square$

Lemma 10.22. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in einer Menge von Variablen. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von null verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene*[33] *Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Es sei G die Gleichung

$$ax + \sum_{i \in I} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx + \sum_{i \in I} c_i x_i = d\,.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a} G$ die Gestalt

$$\sum_{i \in I} (c_i - \frac{c}{a} a_i) x_i = d - \frac{c}{a} b\,,$$

in der x nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ gilt, dass die Gleichungssysteme äquivalent sind. $\square$

Das folgende Verfahren heißt Gausssches Eliminationsverfahren.

Verfahren 10.23. Gegeben sei ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem S über einem Körper K. Dann wendet man auf eine geeignete Variable x Lemma 10.22 an und erhält ein äquivalentes Gleichungssystem bestehend aus einer linearen Gleichung G_1, in der x vorkommt, und einer Menge R_1 von Gleichungen, in denen x nicht vorkommt. Das System $S_1 = \{G_1\} \cup R_1$ ist äquivalent zu S. Man wendet nun dieses Verfahren auf R_1 an (falls R_1 zwei von null verschiedene Gleichungen besitzt) und eliminiert dort eine weitere Variable, etc. So erhält man nach und nach Gleichungssysteme R_i mit immer weniger Variablen und der Eigenschaft, dass $S_i = \{G_1, \ldots, G_i\} \cup R_i$ äquivalent zu S ist. Man ist fertig, wenn man nicht mehr eliminieren kann, und dies ist genau dann der Fall, wenn in R_i nur noch eine von null verschiedene Gleichung steht.

Insgesamt erhält man so ein äquivalentes Gleichungssystem in „Stufenform“, das man einfach lösen kann.

[33] Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

11. Vorlesung

11.1. Lineare Unabhängigkeit.

Definition 11.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung[34]

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0 \text{ mit } a_i \in K \text{ und } a_i = 0 \text{ für fast alle } i$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. In der Definition sind unendliche Indexmengen erlaubt. Man kann sich aber ohne Verständnisverlust zunächst auf endliche Indexmengen beschränken, dann lautet die Bedingung einfach, dass eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$$

nur dann möglich ist, wenn alle $a_i = 0$ sind. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung der Null*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i null sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht null ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art die Null darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Lemma 11.2. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.*
2. *Die leere Familie ist linear unabhängig.*
3. *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*
4. *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*
5. *Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.*
6. *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

---

[34] Die Vokabel *fast alle* bedeutet alle bis auf endlich viele Ausnahmen. Eine Linearkombination ergibt nur dann einen Sinn, wenn nur endlich viele Summanden vorkommen. Dies kann man bei einer unendlichen Indexmenge dadurch umgehen, dass man fordert, dass nur endlich viele Indizes ungleich null sein dürfen, und alle anderen Koeffizienten null sein müssen. Wenn die Indexmenge endlich ist, so kann man diese zusätzliche Bedingung ignorieren.

Beweis. Siehe Aufgabe 11.4. □

11.2. **Basis.**

Definition 11.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, eine *Basis* von V.

Definition 11.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ den Vektor

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n ,$$

wobei 1 an der i-ten Stelle steht, den i-ten *Standardvektor*. Die n Vektoren

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

nennt man die *Standardbasis* des K^n.

Eine Standardbasis ist wirklich eine Basis, siehe Aufgabe 11.6. In einem beliebigen Vektorraum gibt es keine Standardbasis!

Satz 11.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n .$$

(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) $\Rightarrow$ (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i .$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein

Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq \mu_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i - \lambda_i) v_i \, .$$

Wegen $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren, d.h. nach Aufgabe 11.1 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V, im Widerspruch zur Minimalität. (3) $\Rightarrow$ (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig ist. (4) $\Rightarrow$ (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = \lambda u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \, .$$

Dabei ist $\lambda \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wäre. Daher können wir

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. □

Satz 11.6. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 11.5 (ii) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also

v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □

Es gilt allgemeiner, dass nicht nur die endlich erzeugten, sondern überhaupt jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Der Beweis dazu benutzt aber andere Methoden und ist nicht konstruktiv. Z.B. ist es nicht möglich, eine $\mathbb{Q}$-Basis für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 10.6) explizit anzugeben.

11.3. **Dimensionstheorie.**

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Allerdings ist die Anzahl der Elemente in einer Basis stets konstant und hängt nur vom Vektorraum ab. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jetzt beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraums nehmen.

Lemma 11.7. *(Austauschlemma) Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, ,$$

wobei $a_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Dann ist auch die Familie

$$v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

eine Basis von V.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

und $a_k \neq 0$ den Vektor v_k schreiben als

$$v_k = \frac{1}{a_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i}{a_k} v_i$$

Sei nun $u \in V$ beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \lambda_k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \lambda_k \Big(\frac{1}{a_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i}{a_k} v_i\Big) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k \frac{a_i}{a_k})v_i + \frac{\lambda_k}{a_k}w + \sum_{i=k+1}^{n}(\lambda_i - \lambda_k \frac{a_i}{a_k})v_i.$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung $k = 1$ an. Es sei

$$c_1 w + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$0 = c_1 w + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = c_1(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = c_1 a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n}(c_1 a_i + c_i)v_i.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere $c_1 a_1 = 0$, und wegen $a_1 \neq 0$ ergibt sich $c_1 = 0$. Deshalb ist $\sum_{i=2}^{n} c_i v_i = 0$ ist und daher $c_i = 0$ gilt für alle i. □

Satz 11.8. *(Austauschsatz) Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \ldots, b_n .$$

Ferner sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = I$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Insbesondere ist $k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über k, also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für k schon bewiesen und seien $k + 1$ linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Wir wollen auf diese Basis Lemma 11.7 anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten $d_i = 0$, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der u_j, $j = 1, \ldots, k + 1$. Es gibt also ein $i \in I \setminus J$ mit $d_i \neq 0$. Wir setzen $i_{k+1} := i$. Damit ist $J' = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\}$ eine $(k+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor $b_{i_{k+1}}$ durch u_{k+1} ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J' .$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge vorliegt. □

Satz 11.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \ldots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ zwei Basen von V. Aufgrund von Satz 11.8, angewandt auf die Basis $\mathfrak{b}$ und die linear unabhängige Familie $\mathfrak{u}$ ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$. □

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

Definition 11.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V, geschrieben

$$\dim(V) .$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim(V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum*, wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

Korollar 11.11. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.*

Beweis. Die Standardbasis e_i, $i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n. □

Korollar 11.12. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V) .$$

Beweis. Jede linear unabhängige Famile in U ist auch linear unabhängig in V. Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in U nur linear unabhängige Familien der Länge $\leq n$ geben. Es sei $k \leq n$ derart, dass es in U eine linear unabhängige Familie mit k Vektoren gibt, aber nicht mit $k+1$ Vektoren. Sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in U und daher wegen Satz 11.5 eine Basis von U. □

Korollar 11.13. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) $v_1, \ldots, v_n$ *bilden eine Basis von V.*
(2) $v_1, \ldots, v_n$ *bilden ein Erzeugendensystem von V.*
(3) $v_1, \ldots, v_n$ *sind linear unabhängig.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.8. □

Beispiel 11.14. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Unterräume des K^n verschaffen, als Dimension von Unterräumen kommt nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene K^2, und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{\lambda v | \, \lambda \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v. Zwei von null verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind.

Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3, die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Lemma 11.15. *(Basisergänzungssatz) Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Es seien*

$$u_1, \ldots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \ldots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Aufgrund von Satz 11.8 findet man $n - k$ Vektoren aus der Basis $\mathfrak{b}$, die zusammen mit den vorgegebenen $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von V bilden. □

12. Vorlesung

12.1. **Lineare Abbildungen.**

Definition 12.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K-Linearität. Lineare Abbildung heißen auch *Homomorphismen* von Vektorräumen. Die Identität $\mathrm{Id}_V : V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

Beispiel 12.2. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te Projektion, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \longmapsto a_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te Koordinatenfunktion.

Die folgende Aussage bestätigt erneut das Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

Satz 12.3. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Es sei v_i, $i \in I$, eine Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f : V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I .$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$f(\sum_{i \in I} a_i v_i) = \sum_{i \in I} a_i f(v_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i$$

schreiben (wobei $a_i = 0$ ist für fast alle $i \in I$) und

$$f(v) := \sum_{\in I} a_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i \in I} a_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} b_i v_i$ gilt

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((\sum_{i \in I} a_i v_i) + (\sum_{i \in I} b_i v_i)) \\ &= f(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) v_i) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) f(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} a_i f(v_i) + \sum_{i \in I} b_i f(v_i) \\ &= f(\sum_{i \in I} a_i v_i) + f(\sum_{i \in I} b_i v_i) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. □

Lemma 12.4. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W K-Vektorräume. Es seien*

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.6. □

Lemma 12.5. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.*
(2) *Insbesondere ist das Bild* bild $\varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Unterraum von W.*
(3) *Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.*
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.7. □

Definition 12.6. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Dann nennt man
$$\text{kern } \varphi = \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$
den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 12.7. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn kern $\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt kern $\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität
$$\varphi(v_1 - v_2) \,=\, \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \,=\, 0.$$
Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Satz 12.8. *(Dimensionsformel) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt
$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \text{kern } \varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $s = \dim(U)$ seine Dimension ($s \leq n$). Es sei
$$u_1, \ldots, u_s$$
eine Basis von U. Aufgrund von Lemma 11.15 gibt es Vektoren
$$v_1, \ldots, v_{n-s}$$
derart, dass
$$u_1, \ldots, u_s,\, v_1, \ldots, v_{n-s}$$
eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass
$$w_j = \varphi(v_j),\, j = 1, \ldots, n-s\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-s$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j \,.$$

Dann ist

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j) \;=\; \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \varphi(v_j) \;=\; 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis vorliegt, folgt daraus, dass alle Koeffizienten null sein müssen, also sind insbesondere $\gamma_j = 0$. □

Definition 12.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\text{rang } \varphi = \dim(\text{bild } \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \text{rang } \varphi$$

ausdrücken.

Korollar 12.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 12.8 und Lemma 12.7. □

12.2. **Isomorphe Vektorräume.**

Definition 12.11. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Eine bijektive, lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *Isomorphismus.*

Definition 12.12. Es sei K ein Körper. Zwei K-Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Lemma 12.13. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K- Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.12. □

Satz 12.14. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind V und W zueinander isomorph genau dann, wenn ihre Dimension übereinstimmt. Insbesondere ist ein n-dimensionaler K-Vektorraum isomorph zum K^n.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.10. □

Bemerkung 12.15. Eine Isomorphie zwischen einem n-dimensionalen Vektorraum V und dem Standardraum K^n ist im Wesentlichen äquivalent zur Wahl einer Basis in V. Zu einer Basis

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$$

gehört die lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto v_i,$$

die also den Standardraum in den Vektorraum abbildet, indem sie dem i-ten Standardvektor den i-ten Basisvektor aus der gegebenen Basis zuordnet. Dies definiert nach Satz 12.3 eine eindeutige lineare Abbildung, die aufgrund von Aufgabe 12.15 bijektiv ist. Es handelt sich dabei einfach um die Abbildung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, .$$

Die Umkehrabbildung

$$x = \varphi^{-1} : V \longrightarrow K^n$$

ist ebenfalls linear und heißt die zur Basis gehörende *Koordinatenabbildung*. Die i-te Komponente davon, also die zusammengesetzte Abbildung

$$x_i = p_i \circ x_i : V \longrightarrow K, \, v \longmapsto (\varphi^{-1}(v))_i,$$

heißt i-te *Koordinatenfunktion*. Sie wird mit v_i^* bezeichnet, und gibt zu einem Vektor $v \in V$ in der eindeutigen Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

die Koordinaten λ_i aus. Man beachte, dass die lineare Abbildung v_i^* von der gesamten Basis abhängt, nicht nur von dem Vektor v_i.

Wenn umgekehrt ein Isomorphismus

$$\varphi : K^n \longrightarrow V$$

gegeben ist, so sind die Bilder

$$\varphi(e_i), i = 1, \ldots, n,$$

eine Basis von V.

Definition 12.16. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Dann nennt man

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W | \text{ lineare Abbildung}\}$$

den *Homomorphismenraum*. Er wird versehen mit der Addition, die durch

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

definiert wird, und der Skalarmultiplikation, die durch

$$(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

definiert wird.

Mit diesen Operationen liegt ein Vektorraum vor, siehe Aufgabe 12.14.

12.3. **Matrizenkalkül.**

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge fasst man als eine Matrix zusammen.

Definition 12.17. Es sei K ein Körper und I und J zwei Indexmengen. Eine $I \times J$- *Matrix* ist eine Abbildung

$$I \times J \longrightarrow K,\ (i, j) \longmapsto a_{ij}.$$

Bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einer $m \times n$- *Matrix*. In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jeden $i \in I$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i-te *Zeile* der Matrix, was man zumeist als einen *Zeilenvektor*

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem $j \in J$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j-te *Spalte* der Matrix, was man zumeist als einen Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij}, indem man die i-te Zeile mit der j-ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix*. Eine $m \times 1$-Matrix ist einfach ein Spaltenvektor der Länge m, und eine $1 \times n$-Matrix ist einfach ein Zeilenvektor der Länge m.

Definition 12.18. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann ist das *Matrixprodukt*

$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.

Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE) \begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = ZS + EP + IA + LL + ET$$

verwenden.

Insbesondere kann man eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m.

Bemerkung 12.19. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ kurz schreiben als

$$Ax = c\,.$$

Die erlaubten Gleichungsumformungen durch Manipulation an den Zeilen, die den Lösungsraum nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.

13. Vorlesung

13.1. **Invertierbare Matrizen.**

Definition 13.1. Die $n \times n$-Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Definition 13.2. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A\,.$$

Definition 13.3. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1}\,.$$

Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen wird mit

$$\mathrm{GL}_n\,(K)$$

bezeichnet. Diese Menge ist mit der Multiplikation von Matrizen, der n-ten Einheitsmatrix als neutralem Element und der inversen Matrix, die eindeutig bestimmt ist, eine Gruppe. Sie heißt die *allgemeine lineare Gruppe*.

13.2. **Lineare Abbildungen und Matrizen.**

Definition 13.4. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bzgl. der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 12.3 definierte lineare Abbildung $\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M)$ die *durch M festgelegte lineare Abbildung.*

Satz 13.5. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Dann sind die in der Definition festgelegten Zuordnungen*

$$\varphi \longmapsto M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Wir zeigen, dass die beiden Hintereinanderschaltungen die Identität ist. Wir starten mit einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ und betrachten die Matrix

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M))\,.$$

Zwei Matrizen sind gleich, wenn für jedes Indexpaar (i, j) die Einträge übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned} (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M)))_{ij} &= i - \text{Koordinate von } (\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M))(v_j) \\ &= i - \text{Koordinate von } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Sei nun φ eine lineare Abbildung, und betrachten wir

$$\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi))\,.$$

Diese zwei linearen Abbildungen stimmen überein, wenn man zeigen kann, dass sie auf der Basis $v_1, \ldots, v_n$ übereinstimmen. Es ist

$$(\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)))(v_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi))_{ij}\, w_i.$$

Dabei ist nach Definition der Koeffizient $(M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi))_{ij}$ die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_m$. Damit ist diese Summe gleich $\varphi(v_j)$. $\square$

Beispiel 13.6. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

wird zumeist durch die Matrix M bzgl. den Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j-te Spalte von M ist das Bild des j-ten Standardvektors e_j.

Lemma 13.7. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m .$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)) .$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette

$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W .$$

Bzgl. den Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(u_k) &= \varphi(\psi(u_k)) \\
&= \varphi(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \varphi(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i .
\end{aligned}$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. □

Lemma 13.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i \, .$$

Daher ist

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}) w_i .$$

Dies ist genau dann null, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ ist für alle i, und dies ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0$. Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 13.7. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \text{ und } \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V \, .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 13.7 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M \, .$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. $\square$

13.3. **Basiswechsel.**

Lemma 13.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor v, der bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ besitzt, bzgl. der Basis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_j c_{ij}) u_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Man kann diese Aussage auch so auffassen: Zu den beiden Basen gehören die bijektiven linearen Abbildungen

$$\psi_{\mathfrak{v}} : K^n \longrightarrow V \text{ und } \psi_{\mathfrak{u}} : K^n \longrightarrow V$$

(die jeweils die Standardvektoren auf die Basisvektoren schicken). Dann ist

$$(\psi_{\mathfrak{u}})^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}} : K^n \longrightarrow K^n$$

ebenfalls eine bijektive lineare Abbildung, und diese wird bzgl. der Standardbasis durch $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ beschrieben.

Lemma 13.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bzgl. den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \circ (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\psi_{\mathfrak{v}}$, $\psi_{\mathfrak{u}}$, $\psi_{\mathfrak{w}}$, $\psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wenn man die beschreibende Matrix als lineare Abbildung zwischen den Standardräumen auffasst, so ergibt sich die Beziehung

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\psi_{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\ &= M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 13.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bzgl. $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{u}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1} .$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 13.10. □

Es ist ein wichtiger Aspekt, zu einer gegebenen linearen Abbildung eines Vektorraumes in sich selbst eine Basis zu finden, bzgl. der die beschreibende Matrix möglichst einfach wird. Dieses Problem ist äquivalent damit, zu einer quadratischen Matrix M eine invertierbare Matrix A zu finden derart, dass AMA^{-1} möglichst einfach ist.

13.4. **Elementarmatrizen.**

Definition 13.12. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 10.22 gezeigt wurde.

Satz 13.13. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bringen.

Beweis. Dies beruht auf den gleichen Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe 10.23. □

Definition 13.14. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen.*

(1) $V_{ij} = E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k = E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & s & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Lemma 13.15. *Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ *Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile.*
(2) $(S_k(s))) \circ M =$ *Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) $V_{ij} \circ M =$ *Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.8. □

Verfahren 13.16. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$E_n^{-1}N = E_nN = N = M^{-1}.$$

Beispiel 13.17. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in 13.16 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

14. Vorlesung

14.1. Rang von Matrizen.

Definition 14.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den (Spalten-) *rang* der Matrix, geschrieben

$$\text{rang}\, M\,.$$

Korollar 14.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ *beschrieben werde. Dann gilt*

$$\mathrm{rang}\ \varphi = \mathrm{rang}\ M\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 14.2. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer Matrix ein, dass ist die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes.

Lemma 14.3. *Es sei* K *ein Körper und sei* M *eine* $m \times n$*-Matrix über* K*. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 13.13 verwendeten Zahl* r*.*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 13.13 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 14.1 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom Rang einer Matrix sprechen werden.

Korollar 14.4. *Es sei* K *ein Körper und sei* M *eine* $n \times n$*-Matrix über* K*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) M *ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von* M *ist* n*.*
(3) *Die Zeilen von* M *sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von* M *sind linear unabhängig.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 13.8 und aus Lemma 14.3. □

14.2. **Determinanten.**

Definition 14.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n\times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv

$$\det\ M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\ M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 14.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

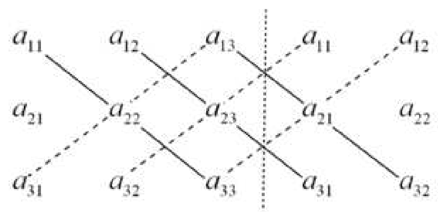
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$

Beispiel 14.7. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die Regel von Sarrus. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Lemma 14.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n\,.$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix

$$\det E_n = 1\,.$$

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

14.3. **Determinantenfunktionen.**

Zur systematischen Behandlung von Determinanten braucht man einige neue Begriffe.

Definition 14.9. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\triangle : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ mit $v_j \in V_j$ die induzierte Abbildung

$$V_i \longrightarrow W,\, v_i \longmapsto \triangle(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

linear ist.

Definition 14.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\triangle : V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow K$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist $\triangle(v) = 0$.

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine multilineare alternierende Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix auf als einen Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.[35]

Satz 14.11. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\, M \longmapsto \det M,$$

[35] Die alterniernende Multilinearität gilt auch, wenn man eine Matrix als ein n-Tupel aus Spalten auffasst, was wir später zeigen werden. Aufgrund der rekursiven Definition mit Hilfe der ersten Spalte sind diese Eigenschaften einfacher für die Zeilen zu zeigen.

multilinear. D.h., dass für beliebiges $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und $u, w \in K^n$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ \lambda u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Beweis. Sei

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{M} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge analog bezeichnen. Insbesondere ist also $u = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ und $w = (a'_{k1}, \ldots, a'_{kn})$. Zu jedem Vektor v sei v^* der Vektor, der entsteht, wenn man den ersten Eintrag weglässt. Zu $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ ist also $v_i^* = (a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Mit dieser Notation ist

$$M_k = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{k-1}^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} .$$

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Für $i \neq k$ ist $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} = a'_{i1}$ und

$$\det \tilde{M}_i = \det M_i + \det M'_i$$

nach Induktionsvoraussetzung. Für $i = k$ ist $M_k = M'_k = \tilde{M}_k$ und es ist $\tilde{a}_{k1} = a_{k1} + a'_{k1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det \tilde{M} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{i1} \det \tilde{M}_i \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (\det M_i + \det M'_i) + (-1)^{k+1} (a_{k1} + a'_{k1}) (\det \tilde{M}_k) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad +(-1)^{k+1} a_{k1} \det M_k + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i\neq k i=1,}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad +(-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i \\
&= \det M + \det M'.
\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation beweist man ähnlich, siehe Aufgabe 14.11. □

Satz 14.12. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det M = 0$. *D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. (1) und (2) werden parallel durch Induktion über n bewiesen, wobei es für $n = 1$ nichts zu zeigen gibt. Sei also $n \geq 2$ und $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{ij}$. Die relevanten Zeilen seien v_r und v_s mit $r < s$. Nach Definition ist $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i$. Nach Induktionsvoraussetzung für (1) sind dabei $\det M_i = 0$ für $i \neq r, s$, da ja dann zwei Zeilen übereinstimmen. Damit ist

$$\det M = (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s\,,$$

wobei $a_{r1} = a_{s1}$ ist. Die beiden Matrizen M_r und M_s haben die gleichen Zeilen, allerdings tritt die Zeile $z = v_r = v_s$ in M_r als die $(s-1)$-te Zeile und in M_s als die r-te Zeile auf. Alle anderen Zeilen kommen in beiden Matrizen in der gleichen Reihenfolge vor. Durch insgesamt $s - r - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen kann man M_r in M_s überführen. Nach der Induktionsvoraussetzung für (2) unterscheiden sich daher die Determinanten um den Faktor $(-1)^{s-r-1}$, also ist $\det M_s = (-1)^{s-r-1} \det M_r$. Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\det M &= (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s \\ &= a_{r1}((-1)^{r+1} \det M_r + (-1)^{s+1}(-1)^{s-r-1} \det M_r) \\ &= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^{2s-r}) \det M_r) \\ &= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^{r}) \det M_r) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir (2). Nach Teil (1) (für n) und aufgrund der Multilinearität ist

$$\begin{aligned}0 &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Satz 14.13. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

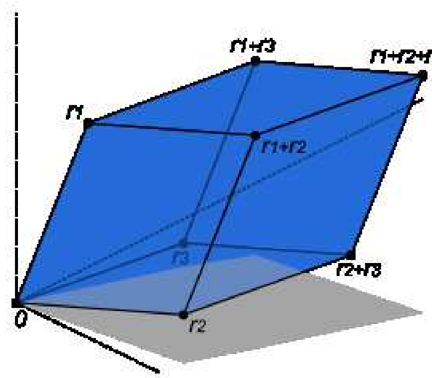
(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*

(4) rang $M = n$.

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 14.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 14.12

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Zeilenaddition die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von null verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinate der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. $\square$



Bemerkung 14.14. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n |\, a_i \in [0,1]\}.$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen“ Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\operatorname{vol} P = |\det(v_1, \ldots, v_n)|,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

15. Vorlesung

15.1. **Universelle Eigenschaft der Determinante.**

Definition 15.1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung

$$\triangle : V^n \longrightarrow K$$

heißt *Determinantenfunktion*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) $\triangle$ ist multilinear.
(2) $\triangle$ ist alternierend.

Lemma 15.2. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei*

$$\triangle : \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K$$

eine Determinantenfunktion. Dann besitzt $\triangle$ folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn man eine Zeile von M mit $s \in K$ multipliziert, so ändert sich $\triangle$ um den Faktor s.*
(2) *Wenn in M eine Nullzeile vorkommt, so ist $\triangle(M) = 0$.*
(3) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich $\triangle$ mit dem Faktor -1.*
(4) *Wenn man zu einer Zeile ein skalares Vielfaches einer anderen Zeile dazuaddiert, so ändert sich $\triangle$ nicht.*
(5) *Wenn $\triangle(E_n) = 1$ ist, so ist für eine obere Dreiecksmatrix $\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.*

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Multilinearität. (3) folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Zu (4) betrachten wir die Situation, wo zur s-ten Zeile das a-fache der r-ten Zeile addiert wird, $r < s$. Aufgrund der schon bewiesenen Teile ist dann

$$\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s + av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + a\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

(5). Wenn ein Diagonalelement null ist, so sei $r = \max\{i |\, a_{ii} = 0\}$. Zu der r-ten Zeile kann man durch Hinzuaddieren von geeigneten Vielfachen der i-ten Zeilen, $i > r$, erreichen, dass aus der r-ten Zeile eine Nullzeile wird, ohne dass sich der Wert der Determinantenfunktion ändert. Nach (2) muss dieser Wert dann null sein. Wenn kein Diagonalelement null ist, so kann man durch wiederholte Skalierung erreichen, dass alle Diagonalelemente zu 1 werden, und durch Zeilenadditionen kann man erreichen, dass die Einheitsmatrix entsteht. Daher ist

$$\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\triangle(E_n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$\square$

Satz 15.3. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion*

$$\triangle : \operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K$$

mit

$$\triangle(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1\,,$$

wobei e_i die Standardvektoren sind, nämlich die Determinante.

Beweis. Die Determinante besitzt aufgrund von Satz 14.11, Satz 14.12 und Lemma 14.8 die angegebenen Eigenschaften. Zur Eindeutigkeit. Zu jeder Matrix M gibt es eine Folge von elementaren Zeilenumformungen derart, dass das Ergebnis eine obere Dreicksmatrix ist. Dabei ändert sich nach Lemma 15.2 bei einer Vertauschung von Zeilen der Wert der Determinante mit dem Faktor -1, bei der Umskalierung einer Zeile um den Skalierungsfaktor und bei der Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile gar nicht. Daher ist eine Determinantenfunktion durch die Werte auf einer oberen Dreiecksmatrix bzw. nach Skalierung und Zeilenaddition sogar auf der Einheitsmatrix festgelegt. $\square$

15.2. Der Determinantenmultiplikationssatz.

Satz 15.4. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B$$

Beweis. Wir fixieren die Matrix B. Es sei zunächst $\det B = 0$. Dann sind die Spalten von B linear abhängig und damit sind auch die Spalten von $A \circ B$ linear abhängig, woraus $\det AB = 0$ folgt. Sei nun B invertierbar. In diesem Fall betrachten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\delta : \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K,\ A \longmapsto (\det A \circ B)(\det B)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung gleich der Abbildung $A \mapsto \det A$ ist, indem wir die die Determinante charakterisierenden Eigenschaften nachweisen und Satz 15.3 anwenden. Wenn $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A sind, so ergibt sich $\delta(A)$, indem man auf die Zeilen $Bz_1, \ldots, Bz_n$ die Determinante anwendet und mit $(\det B)^{-1}$ multipliziert. Daher folgt die Multilinearität und die alternierende Eigenschaft aus Aufgabe 14.10. Wenn man mit $A = E_n$ startet, so ist $A \circ B = B$ und daher ist

$$\delta(E_n) \;=\; (\det B) \cdot (\det B)^{-1} \;=\; 1.$$

$\square$

15.3. Die Determinante der Transponierten.

Definition 15.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^t = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 15.6. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^t\,.$$

Beweis. Wir führen diese Aussage auf die entsprechenden Aussagen für Elementarmatrizen zurück, wofür sie direkt verifiziert werden kann, siehe Aufgabe 15.7. Es gibt Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ derart, dass

$$D = E_s \cdots E_1 M$$

eine Diagonalmatrix ist oder aber eine Nullzeile besitzt. In jedem Fall ist dann

$$D^t = M^t E_1^t \cdots E_s^t$$

bzw.

$$M^t = D^t (E_s^t)^{-1} \cdots (E_1^t)^{-1} .$$

Wenn D eine Nullzeile besitzt, so ist der Zeilenrang $< n$. Da dies ebenso für den Spaltenrang gilt, ist $\det M^t = 0$. Wir können also annehmen, dass D eine Diagonalmatrix ist. Eine solche ändert sich beim Transponieren nicht. Da die Determinante von Elementarmatrizen sich beim Transponieren auch nicht ändern, gilt

$$\begin{aligned} \det M^t &= \det \left(D^t (E_s^t)^{-1} \cdots (E_1^t)^{-1}\right) \\ &= \det D^t \cdot \det (E_s^t)^{-1} \cdots \det (E_1^t)^{-1} \\ &= \det D \cdot \det E_s^{-1} \cdots \det E_1^{-1} \\ &= \det E_1^{-1} \cdots \det E_s^{-1} \cdot \det D \cdot \\ &= \det \left(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} \cdot D\right) \\ &= \det M. \end{aligned}$$

□

Korollar 15.7. *(Entwicklung nach beliebiger Spalte und Zeile) Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} .$$

Beweis. Für $j = 1$ ist dies die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt es für $i = 1$ aufgrund von Satz 15.6. Durch Spalten und Zeilenvertauschung folgt es daraus allgemein, siehe Aufgabe 15.10. □

15.4. **Die Determinante von Endomorphismen.**

Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Dieser wird (siehe Definition 13.4) durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu nehmen, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bzgl. einer anderen Basis durch eine „völlig“ andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Übergangsmatrix B aufgrund von Korollar 13.11 die Beziehung
$$N = BMB^{-1}\,.$$
Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher
$$\det N \;=\; \det(BMB^{-1}) \;=\; (\det B)(\det M)(\det B)^{-1} \;=\; \det M,$$
so dass die folgende Definition unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 15.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung, die bzgl. einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man
$$\det \varphi := \det M$$
die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

15.5. **Adjungierte Matrix und Cramersche Regel.**

Definition 15.9. Zu einer quadratischen Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt
$$\mathrm{Adj}\ M = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji}\,,$$
wobei M_{ji} die Restmatrix zur j-ten Zeile und zur i-ten Spalte ist, die *adjungierte Matrix* von M.

Achtung, bei der Definition der Einträge der adjungierten Matrix werden Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 15.10. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*
$$(\mathrm{Adj}\ M) \cdot M \;=\; M \cdot (\mathrm{Adj}\ M) \;=\; (\det M) E_n$$
Wenn M invertierbar ist, so ist
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \mathrm{Adj}\ M\,.$$

Beweis. Sei $M = (a_{ij})_{ij}$. Die Koeffizienten der adjungierten Matrix seien

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \det M_{ki} .$$

Die Koeffizienten des Produktes $(\text{Adj } M) \cdot M$ sind

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki}.$$

Bei $j = i$ ist dies $\det M$, da es sich bei dieser Summe um die Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte handelt. Sei $j \neq i$ und es sei N die Matrix, die aus M entsteht, wenn man in M die i-te Spalte durch die j-te Spalte ersetzt. Wenn man N nach der i-ten Spalte entwickelt, so ist dies

$$0 = \det N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki} = c_{ij}.$$

Also sind diese Koeffizienten null, und damit stimmt die erste Gleichung. Die zweite Geichung ergibt sich ebenso, wobei man die Entwicklung der Determinante nach den verschiedenen Zeilen ausnutzen muss. □

Satz 15.11. *(Cramersche Regel) Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Es sei vorausgesetzt, dass die beschreibende Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ invertierbar sei. Dann erhält man die eindeutige Lösung für x_j durch

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & c_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & c_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det M} .$$

Beweis. Für eine invertierbare Matrix M ergibt sich die Lösung für das lineare Gleichungssystem $Mx = c$, indem man M^{-1} anwendet, d.h. es ist $x = M^{-1}c$. Unter Verwendung von Satz 15.10 bedeutet dies $x = \frac{1}{\det M}(\text{Adj } M)c$. Für die j-te Komponente bedeutet dies

$$x_j = \frac{1}{\det M} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} (\det M_{kj}) \cdot c_k \right).$$

Der rechte Faktor ist dabei die Entwicklung der Determinante der Matrix im Zähler nach der j-ten Spalte. □

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Bemerkung 15.12. Die Determinante kann auch auf eine andere Art eingeführt werden, nämlich über die sogenannte *Leibniz-Formel*. Diese lautet für eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \,.$$

Dabei wird über alle bijektiven Abbildungen (man spricht in diesem Zusammenhang von Permutationen) von $\{1, \ldots, n\}$ auf sich summiert. Zu einer Permutation σ ist das *Signum* (oder das *Vorzeichen*) $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ durch

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

definiert.

16. Vorlesung

16.1. **Eigentheorie.**

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Beiden Vektoren ist gemeinsam, dass ihr Bild unter der linearen Abbildung im von dem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum bleibet. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbidung auf sich selbst abgebildet werden.

Eine Achsenspiegelung besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

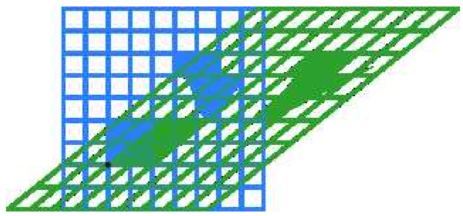
Definition 16.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$.



Eine Scherung hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weitere Eigenwerte.

Definition 16.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von null verschiedenen Vektor $v \in V$ gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v\,.$$

Definition 16.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* zu φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte in der Definition der Eigenräume. Einen eindimensionalen Eigenraum nennen wir auch *Eigengerade.*

Lemma 16.4. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.1. □

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe. Ist $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und M eine beschreibende Matrix bzgl. einer Basis, so gilt für einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor $v \in V$ mit dem Koordinatentupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis die Beziehung $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Die Matrix N bzgl. einer weiteren Basis steht dann in der Beziehung $N = BMB^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix B. Es sei $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ das Koordinatentupel bzgl. der anderen Basis. Dann ist

$$N \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (BMB^{-1}) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (BMB^{-1})B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$B\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

d.h. die beschreibenden Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte, wobei allerdings die beschreibenden Koordinatentupel für die Eigenvektoren sich mit den Basen ändern.

Beispiel 16.5. Wie betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^n,\ e_i \longmapsto d_i e_i.$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_d(\varphi) = \{v \in K \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\}\,.$$

Diese Räume sind genau dann von null verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe der Dimensionen ergibt n.

Beispiel 16.6. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt dazu, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen dem variablen „Eigenwertparameter“ λ zu nichtlinearen Problemen. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y\,.$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man die notwendige Bedingung

$$5y \;=\; \lambda x \;=\; \lambda^2 y.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$. Bei $y \neq 0$ folgt aus dieser Gleichung

$$5 = \lambda^2\,.$$

Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man jetzt unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man also

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} +\sqrt{5} & -5 \\ -1 & +\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umwandlungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \{s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \{s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma 16.7. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von φ, wenn φ nicht injektiv ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 16.2. □

Allgemeiner gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 16.8. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi) = \mathrm{kern}\,(\lambda \cdot \mathrm{Id}_V - \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \mathrm{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann. □

Bemerkung 16.9. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind insbesondere die Eigenwerte 1 und -1 interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt also die Abbildung wie die Identität. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

Lemma 16.10. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.3. □

Lemma 16.11. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu verschiedenen Elementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für Zahlen $< n$ bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0\,.$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \ldots + \lambda_n a_n v_n = 0\,.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \ldots + \lambda_n a_n v_n = 0\,.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1)a_1v_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})a_{n-1}v_{n-1} = 0\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i)a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

Korollar 16.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es nur endlich viele Eigenwerte zu φ.

Beweis. Siehe Aufgabe 16.4. □

16.2. **Diagonalisierbarkeit.**

Definition 16.13. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 16.14. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. *φ ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathfrak{v}$ von V derart, dass die beschreibende Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
3. *Für jede beschreibende Matrix $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ gibt es eine invertierbare Matrix B derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 16.5 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 13.11. □

Korollar 16.15. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Aufgrund von Lemma 16.11 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 11.13 eine Basis. □

Beispiel 16.16. Wir schließen an Beispiel 16.6 an. Es gibt die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung diagonalisierbar ist. Bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{v}$ zur Basis $\mathfrak{u} = e_1, e_2$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Gemäß Korollar 13.11 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Beispiel 16.17. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Die Eigenwertbedingung für ein $\lambda \in K$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

was zu den beiden Gleichungen

$$x + ay = \lambda x \text{ und } y = \lambda y$$

führt. Bei $\lambda = 0$ folgt $y = 0$ und dann auch $x = 0$, d.h., $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert. Sei also $\lambda \neq 0$. Bei $\lambda \neq 1$ folgt $y = 0$ und damit wieder auch $x = 0$. Es kann also nur $\lambda = 1$ ein Eigenwert sein. In diesem Fall ist die zweite Gleichung erfüllt und die erste Gleichung wird zu

$$x + ay = x \text{ bzw. } ay = 0 .$$

Bei $a \neq 0$ muss also $y = 0$ sein und dann ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ der Eigenraum zum Eigenwert 1, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein typischer Eigenvektor. Bei $a = 0$ liegt die Einheitsmatrix vor, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die gesamte Ebene.

17. Vorlesung

Wir wollen einen systematischen Weg beschreiben, die Eigenwerte eines Endomorphismus aufzufinden. Dafür brauchen wir einige Grundtatsachen über Polynome, die wir dann auf das charakteristische Polynom eines Endomorphismus anwenden können.

17.1. **Der Polynomring über einem Körper.**

Definition 17.1. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

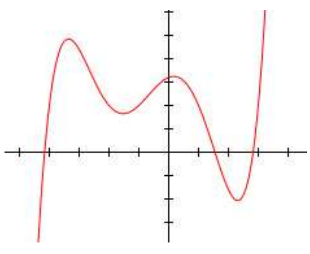
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten null sind) als neutralem Element. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0.

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten gegeben. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j X^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{k-r} \,.$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Definition 17.2. Der *Grad* eines von null verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms.

Satz 17.3. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \textit{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \textit{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = T$ die Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ die Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \ldots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' = P - TH = 0X^n + (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1})X^{n-1} + \ldots + (a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0)X^{n-k} \\ +a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \ldots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P \;=\; P' + TH \;=\; TQ' + TH + R' \;=\; T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ die Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, und der Polynomring nullteilerfrei ist, ist diese Gleichung nur bei $R = R'$ und somit $Q = Q'$ lösbar. $\square$

Lemma 17.4. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund von Satz 17.3 eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. Also ist $X - a$ ein Linearfaktor von P. □

Korollar 17.5. *Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom (ungleich null) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 17.4 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann null sein, wenn einer der Faktoren null ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

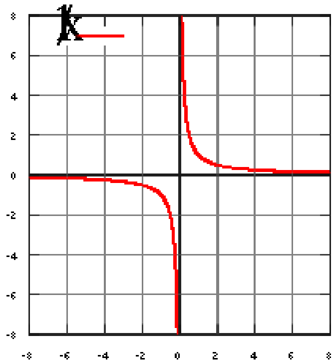
Korollar 17.6. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Dann besitzt jedes $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung*

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q. Dabei sind die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.7. □

Es gilt allgemeiner, dass die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren im Wesentlichen eindeutig ist.



Man kann auch Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion 1/X.

Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Man kann aber einen Körper konstruieren, der den Polynomring enthält, ähnlich wie man aus $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dazu definiert man

$$K(T) := \{\frac{P}{Q} | \, P, Q \in K[X], \, Q \neq 0\} \, ,$$

wobei man wieder zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn $PQ' = P'Q$ ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K). Wir brauchen diesen Körper, um das charakteristische Polynom zu einem Endomorphismus korrekt definieren zu können.

17.2. **Das charakteristische Polynom.**

Definition 17.7. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M = \det \left(X \cdot E_n - M \right)$$

das *charakteristische Polynom* von M.

Für $M = (a_{ij})_{ij}$ bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix} .$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente in $K(X)$ auffassen können, ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der

Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1 X + c_0\,.$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det\left(\lambda E_n - M\right)$$

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 17.19.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi := \chi_M\,,$$

wobei M eine beschreibende Matrix sei. Das gleiche Argument, das wir in der Vorlesung 15 angewendet haben, zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Satz 17.8. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M\left(\lambda\right) = \det\left(\lambda E_n - M\right) = 0$$

genau dann, wenn

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 14.3 und Lemma 13.8). Dies ist nach Lemma 12.7 äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}\left(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi\right) \neq 0\,,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. $\square$

Für eine genauere Untersuchung ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische Vielfachheit* von λ und die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, also

$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$$

die *geometrische Vielfachheit*. Der vorstehende Satz besagt also, dass die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt. Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber auseinander fallen, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 17.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)) \leq \mu_\lambda(\varphi)\,.$$

Beweis. Sei $m = \dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bzgl. dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher $(X-\lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. □

18. Vorlesung

18.1. Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen.

Satz 18.1. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda = \dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$$

gilt.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so kann man sofort annehmen, dass φ bzgl. einer Basis aus Eigenvektoren durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird. Die Diagonaleinträge dieser Matrix sind die Eigenwerte, und diese wiederholen sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit. Das charakteristische Polynom lässt sich auch direkt aus dieser Diagonalmatrix ablesen, jeder Diagonaleintrag λ trägt als Linearfaktor $X - \lambda$ bei. Für die Umkehrung seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und

$$\mu_i = \dim(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)) = \mu(\lambda_i)$$

seien die geometrischen=algebraischen Vielfachheiten. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, muss die Summe dieser Zahlen gleich n sein. Es seien

$$v_{ij},\ j = 1, \ldots, \mu_i\,,$$

Basen der Eigenräume $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$ für $i = 1, \ldots, k$. Dies sind insgesamt n Vektoren. Sei

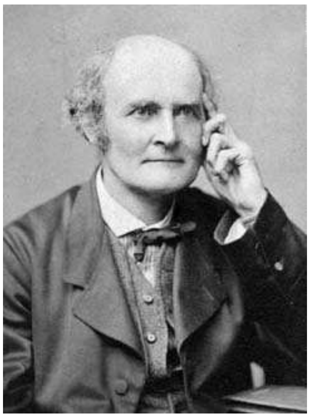
$$\sum_{ij} b_{ij} v_{ij} = 0$$

eine Darstellung der 0. Mit

$$w_i = \sum_{j=1}^{\mu_i} b_{ij} v_{ij} \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$$

ergibt sich $\sum_{i=1}^{k} w_i = 0$, wobei die w_i aus den verschiedenen Eigenräumen sind. Nach Lemma 16.11 sind diese linear unabhängig, also müssen alle $w_i = 0$ sein. Damit müssen auch alle $b_{ij} = 0$ sein und die gewählten Basisvektoren der Eigenräume sind linear unabhängig. Daher bilden sie eine Basis. $\square$

18.2. **Der Satz von Cayley-Hamilton.**



Arthur Cayley (1821-1895)

William Hamilton (1805-1865)

Einer der Höhepunkte dieses Kurses ist der Satz von Cayley-Hamilton. Um ihn formulieren zu können müssen wir uns zunächst klar machen, dass man in Polynome auch quadratische Matrizen einsetzen kann. Dabei ersetzt man an jeder Stelle die Variable X durch die Matrix M und muss die Potenzen M^i als das i-te Matrixprodukt von M mit sich selbst verstehen und die Addition als die (komponentenweise) Addition von Matrizen interpretieren. Ein Skalar a wird dabei als das a-fache der Einheitsmatrix interpretiert. Für das Polynom

$$P = 3X^2 - 5X + 2$$

und die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\begin{aligned} P(M) &= 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu einer fixierten Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt es also eine *Einsetzungsabbildung*

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K),\ P \longmapsto P(M).$$

Dies ist - ebenso wie die Einsetzungsabbildung zu $a \in K$ - ein Ringhomomorphismus, d.h. es gelten die Beziehungen

$$(P+Q)(M) = P(M)+Q(M),\ (P\cdot Q)(M) = P(M)\circ Q(M) \text{ und } 1(M) = E_n\,.$$

Der Satz von Cayley-Hamilton beantwortet nun die Frage, was passiert, wenn man eine Matrix in ihr charakteristisches Polynom einsetzt.

Satz 18.2. *(Der Satz von Cayley-Hamilton) Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Es sei*

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0$$

das charakteristische Polynom zu M. Dann gilt

$$\chi_M\,(M) = M^n + c_{n-1}M^{n-1} + \ldots + c_1M + c_0 = 0\,.$$

Das heißt, dass das charakteristische Polynom die Matrix annulliert.

Beweis. Wir fassen die Matrix $XE_n - M$ als eine Matrix auf, deren Einträge im Körper $K(X)$ liegen. Die adjungierte Matrix

$$\mathrm{Adj}\,(XE_n - M)$$

liegt ebenfalls in $\mathrm{Mat}_n(K)$. Die einzelnen Einträge der adjungierten Matrix sind nach Definition Determinanten von $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrizen von $XE_n - M$. In den Einträgen dieser Matrix kommt die Variable X maximal in der ersten Potenz vor, so dass in den Einträgen der adjungierten Matrix die Variable maximal in der $(n-1)$-ten Potenz vorkommt. Wir schreiben

$$\operatorname{Adj}(XE_n - M) = X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + \ldots + XA_1 + A_0$$

mit Matrizen

$$A_i \in \operatorname{Mat}_n(K)\,,$$

d.h. man schreibt die einzelnen Einträge als Polynom und fasst dann zu X^i die Koeffizienten zu einer Matrix zusammen. Aufgrund von Satz 15.10 gilt

$$\begin{aligned} \chi_M E_n &= (XE_n - M) \circ \operatorname{Adj}(XE_n - M) \\ &= (XE_n - M) \circ (X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} \\ &\quad + \ldots + XA_1 + A_0) \\ &= X^n A_{n-1} + X^{n-1}(A_{n-2} - M \circ A_{n-1}) \\ &\quad + X^{n-2}(A_{n-3} - M \circ A_{n-2}) \\ &\quad + \ldots + X^1(A_0 - M \circ A_1) - M \circ A_0. \end{aligned}$$

Wir können auch die Matrix links nach den Potenzen von X aufteilen, dann ist

$$\chi_M E_n = X^n E_n + X^{n-1}c_{n-1}E_n + X^{n-2}c_{n-2}E_n + \ldots + X^1 c_1 E_n + c_0 E_n\,.$$

Da diese zwei Polynome übereinstimmen, müssen jeweils ihre Koeffizienten übereinstimmen. D.h. wir haben ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} E_n &=& A_{n-1} \\ c_{n-1}E_n &=& A_{n-2} - M \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}E_n &=& A_{n-3} - M \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 E_n &=& A_0 - M \circ A_1 \\ c_0 E_n &=& -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen von links von oben nach unten mit $M^n, M^{n-1}, M^{n-2}, \ldots, M^1, E_n$ und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} M^n &=& M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-1}M^{n-1} &=& M^{n-1} \circ A_{n-2} - M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}M^{n-2} &=& M^{n-2} \circ A_{n-3} - M^{n-1} \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 M^1 &=& MA_0 - M^2 \circ A_1 \\ c_0 E_n &=& -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wenn wir die linke Spalte dieses Gleichungssystem aufsummieren, so erhalten wir gerade $\chi_M(M)$. Wenn wir die rechte Seite aufsummieren, so erhalten wir 0, da jeder Teilsummand $M^{i+1} \circ A_i$ einmal positiv und einmal negativ vorkommt. Also ist $\chi_M(M) = 0$. $\square$

18.3. **Euklidische Vektorräume.**

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und das Verhältnis von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum[36] vorliegen.

Definition 18.3. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle\,,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist
$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$
für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, y \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist
$$\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$$
für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v,v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v,v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn vorne zwei Vektorräume stehen), *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

Beispiel 18.4. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (v,w) = ((v_1, \ldots, v_n),(w_1, \ldots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i\,,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Definition 18.5. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum V ist jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf U einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

---

[36] Auch für komplexe Vektorräume gibt es Skalarprodukte, was wir aber nicht behandeln werden.

Definition 18.6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Man nennt zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

Definition 18.7. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^{\perp} = \{v \in V | \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U.

Definition 18.8. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn gilt

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

Mit Hilfe des *Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren* kann man leicht zeigen, dass es in jedem euklidischen Vektorraum Orthonormalbasen gibt, siehe Aufgabe 18.21.

18.4. **Norm und Abstand.**

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

Definition 18.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$|| v ||= \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von v.

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander.

Satz 18.10. *(Ungleichung von Cauchy-Schwarz) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Dann gilt die* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*, nämlich*

$$| \langle v, w \rangle | \leq || v || \cdot || w ||$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Bei $w = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $|| w || \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{|| w ||^4} \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{||w||^2}.$$

Multiplikation mit $||w||^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. □

Bemerkung 18.11. Für zwei von null verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}.$$

Die trigonometrischen Funktionen werden wir bald einführen.

Lemma 18.12. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigneschaften.*

(1) $||v|| \geq 0$,
(2) $||v|| = 0$ *genau dann, wenn* $v = 0$ *ist.*
(3) *Für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $v \in V$ *gilt*

$$||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| .$$

(4) *Für* $v, w \in V$ *gilt*

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| .$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\langle v, \lambda v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle = \lambda^2 ||v||^2 .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$||v + w||^2 = \langle v{+}w, v{+}w\rangle = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\langle v, w\rangle \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2 \, |\langle v, w\rangle|$$

Aufgrund von Satz 18.10 ist dies $\leq (||v|| + ||w||)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. □

Lemma 18.13. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$ $\langle -, -\rangle$ und der zugehörigen Norm $||-||$. Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.9. □

Definition 18.14. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zu zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man

$$d(v, w) := || v - w ||$$

den *Abstand* zwischen v und w.

Lemma 18.15. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind $u, v, w \in V$).*

(1) *Es ist $d(v, w) \geq 0$.*
(2) *Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.*
(3) *Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.*
(4) *Es ist*

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.11. □

18.5. **Isometrien.**

Definition 18.16. Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle .$$

Lemma 18.17. *Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) *φ ist eine Isometrie.*
(2) *Für alle $u, v \in V$ ist $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.*
(3) *Für alle $v \in V$ ist $|| \varphi(v) || = || v ||$.*

Beweis. Die Richtungen (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (3) sind Einschränkungen und (3) $\Rightarrow$ (1) folgt aus Lemma 18.13. □

Satz 18.18. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Isometrie. Dann besitzt jeder Eigenwert von φ den Betrag 1.

Beweis. Es sei $\varphi(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, d.h. v ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Wegen der Isometrieeigenschaft gilt

$$|| v || = || \varphi(v) || = || \lambda v || = | \lambda | \cdot || v || .$$

Wegen $|| v || \neq 0$ folgt daraus $| \lambda | = 1$, also $\lambda = \pm 1$. □

Im Allgemeinen muss es keine Eigenwerte geben (bei ungerader Dimension allerdings schon).

19. Vorlesung

19.1. **Metrische Räume.**

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der Metrik bzw. des metrischen Raumes axiomatisiert.

Definition 19.1. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $d\,(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit),
(2) $d\,(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie), und
(3) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgen, dass eine Metrik nur nichtnegative Werte annimmt. Der Wert $d(x, y)$ gibt den Abstand der Punkte x und y bezüglich d an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt, obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

Beispiel 19.2. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und

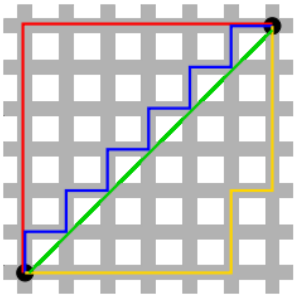
$$d(v, w) := || \, v - w \, || := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 18.15 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im $\mathbb{R}^n$ der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so versehen wir den $\mathbb{R}^n$ und den $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit der durch den Betrag definierten Metrik ein metrischer Raum. Als gemeinsame Bezeichnung für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden wir $\mathbb{K}$ verwenden.



Die Summenmetrik heißt auch Taxi-Metrik. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen den Summenabstand.

Beispiel 19.3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - y_i \,|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.

Beispiel 19.4. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,y) = \max\left(|\, x_i - y_i \,|, i = 1, \ldots, n\right)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

Beispiel 19.5. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist T ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

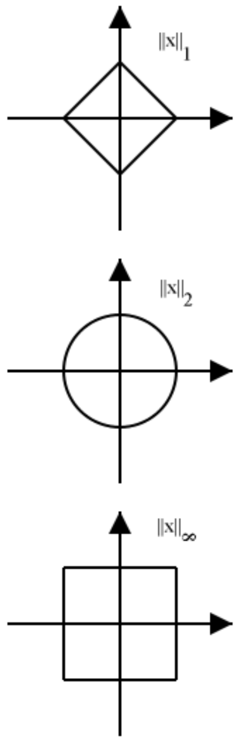
$$d_T(x,y) := d(x,y) \text{ für alle } x, y \in T$$

setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

Beispiel 19.6. Zu einer beliebigen Menge X kann man durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x = y\,, \\ 1 & \text{bei } x \neq y\,, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

Definition 19.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Es ist

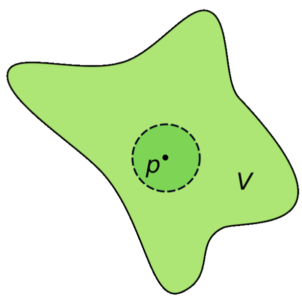
$$U(x, \epsilon) = \{y \in X \colon d(x, y) < \epsilon\}$$

die offene und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \colon d(x, y) \leq \epsilon\}$$

die abgeschlossene ϵ- *Kugel* um $x \in X$.

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Norm. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $U(x, \epsilon)$ einfach das beidseitig offene Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$.



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin gleich mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die Randpunkte dazu gehören oder nicht.

Definition 19.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen* in (X, d), wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ exisitiert mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U\,.$$

Definition 19.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist nicht das „Gegenteil" von offen. Die allermeisten Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

Lemma 19.10. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge X sind offen.*
(2) *Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch*
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) *Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch*
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.1. □

Definition 19.11. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ eines metrischen Raumes X heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl b gibt mit

$$d(x, y) \leq b \text{ für alle } x, y \in T$$

19.2. **Folgen in metrischen Räumen.**

Definition 19.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Man sagt, dass die Folge gegen $x \in X$ *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x\,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), anderfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für $X = \mathbb{R}$ mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein. Allerdings hatten wir, als wir diesen Begriff für angeordnete Körper einführten, die reellen Zahlen selbst noch nicht zur Verfügung.

Lemma 19.13. *Der $\mathbb{R}^m$ sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ mit*

$$z_n = (z_{1n}, \ldots, z_{mn})\,.$$

Dann konvergiert die Folge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(z_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Beweis. Sei die Gesamtfolge konvergent gegen $z = (z_1, \ldots, z_m)$. Wir behaupten, dass die i-te Komponentenfolge $(z_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z_i konvergiert. Sei (ohne Einschränkung) $i = 1$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(z_n, z) \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \mid z_{1n} - z_1 \mid &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + (z_{2n} - z_2)^2 + \ldots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &= d(z_n, z) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die i-te Folge den Grenzwert z_i besitzen möge, und sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $z = (z_1, \ldots, z_m)$ und behaupten, dass die Folge gegen z konvergiert. Zu ϵ/m gibt es für jede Komponentenfolge ein n_{0i} derart, dass $\mid z_{in} - z_i \mid \leq \epsilon/m$. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 = \max\,(n_{0i}, i = 1, \ldots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, z) &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + \ldots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &\leq \sqrt{(\frac{\epsilon}{m})^2 + \ldots + (\frac{\epsilon}{m})^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren.

Definition 19.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n mit $d(x_n, x) \leq \epsilon$ gibt.

Definition 19.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Satz 19.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, die in X konvergiert, bereits in T konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst T abgeschlossen und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ gegeben, die in X gegen $x \in X$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $x \in T$ ist.Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt x im offenen Komplement und daher gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass der gesamte ϵ-Ball $U(x, \epsilon)$ im Komplement von T liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset \, .$$

Da die Folge aber gegen x konvergiert, gibt es ein n_0 derart, dass alle Folgenglieder x_n, $n \geq n_0$, zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in T liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun T nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in T konstruieren, die in X konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu T gehört. Da T nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement $U := X \setminus T$ nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt $x \in U$ derart, dass in jedem ϵ-Ball von x auch Punkte außerhalb von U, also in T liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ der Durchschnitt

$$T \cap U(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset \, .$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element x_n und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in T. Die Folge konvergiert gegen x, da man sich hierzu auf $\epsilon = 1/n$ beschränken kann und alle Folgenglieder x_m, $m \geq n$, in $U(x, \frac{1}{m}) \subseteq U(x, \frac{1}{n})$ liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und $x \notin T$ ist, konvergiert die Folge in T nicht. $\square$

Korollar 19.17. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Es sei $A \subseteq T$ eine in T abgeschlossene Teilmenge. Wenn das Supremum* $\sup A$ *in T exisitiert, so ist* $\sup A \in A$.

Beweis. Es sei $s = \sup A \in T$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es Elemente $x_n \in A$, $x_n \leq s$ und mit $s - x_n \leq \frac{1}{n}$. Andernfalls wäre nämlich $s - \frac{1}{n}$ eine kleinere obere Schranke von A. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $s \in T$ und aufgrund von Satz 19.16 ist $s \in A$. $\square$

Wenn man z.B. das offene Intervall $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ nimmt und $A = T = (0, 1)$ betrachtet, so ist A abgeschlossen in T, das Supremum dieser Menge gehört aber nicht dazu. Ein wichtiger Spezialfall ist das folgende Korollar.

Korollar 19.18. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere, nach oben beschränkte, abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen. Dann gehört das Supremum* $\sup A$ *zu* A.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 19.17 und aus Satz 8.9. □

20. Vorlesung

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher" zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f : L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum M durch den Abstand im Definitionsraum L kontrollierbar ist. Sei $x \in L$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x' , die „nahe" an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ nahe an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit". Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit") mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

20.1. **Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen.**

Definition 20.1. Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume,

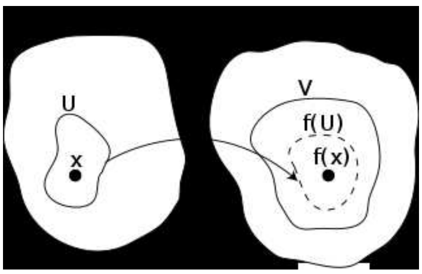
$$f : X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung und $x \in X$. Die Abbildung f heißt *stetig in x*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f\big(U(x, \delta)\big) \subseteq U\big(f(x), \epsilon\big)$$

gilt. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x ist für jedes $x \in X$.

Statt mit den offenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den abgeschlossenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion $T \subseteq M$ einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben.



Lemma 20.2. *Es sei*

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $x \in L$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (2) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (3) erfüllt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass für alle $\delta > 0$ es Elemente $z \in L$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in L$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3). □

Satz 20.3. *Es sei*

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig in jedem Punkt $x \in L$.*
(2) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*
(4) *Für jede offene Menge $V \subseteq M$ ist auch das Urbild $f^{-1}(V)$ offen.*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 20.2. Sei (2) erfüllt und eine offene Menge $V \subseteq M$ gegeben mit dem Urbild $U := f^{-1}(V)$. Sei $x \in U$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $y = f(x) \in V$. Da V offen ist, gibt es nach Definition ein $\epsilon > 0$ mit $U(y, \epsilon) \subseteq V$. Nach (2) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$. Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von x innerhalb des Urbilds gefunden. Sei (4) erfüllt und $x \in L$ mit $y = f(x)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Da der offene Ball $U(y, \epsilon)$ offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild $f^{-1}(U(y, \epsilon))$ offen. Da x zu dieser Menge gehört, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

Lemma 20.4. *Seien L, M, N metrische Räume und seien*

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

Beweis. Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 20.3. □

20.2. **Verknüpfungen und stetige Abbildungen.**

Lemma 20.5. *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\},\ x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus

$$| -x - (-y) | = | -x + y | .$$

Zur zweiten Aussage sei $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Sei $b = | x | > 0$. Wir setzen $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Dann gilt für jedes y mit $| x - y | \leq \delta$ die Abschätzung (wegen $| y | \geq b/2$)

$$| x^{-1} - y^{-1} | = | \frac{y - x}{xy} | \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

Lemma 20.6. *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.6. □

Lemma 20.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien für $i = 1, \ldots, m$ Funktionen*

$$f_i : X \longrightarrow \mathbb{K},$$

gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Beweis. Es genügt, diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 19.13 unter Verwendung von Lemma 20.2. □

Lemma 20.8. *Seien*

$$f, g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{K}$, auf der g keine Nullstelle besizt, ist auch die Funktion

$$f/g : U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$\mathbb{K} \xrightarrow{f,g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}\,.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 20.7. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 20.6. Daher ist wegen Lemma 20.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 20.5 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f,g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

Korollar 20.9. *Polynomfunktionen*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Lemma 20.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto x^n,$$

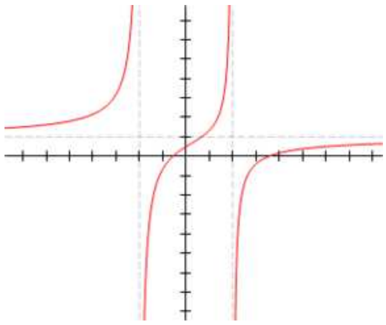
stetig. Daher sind dann auch für jedes $a \in \mathbb{K}$ die Abbildungen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 20.6 sind dann auch alle Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 20.10. *Es seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ zwei Polynome und es sei $U = \{x \in \mathbb{K} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 20.9 und aus Korollar 20.8. □

Satz 20.11. *Es sei $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ stetig.

Beweis. Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

annehmen. Aufgrund von Lemma 20.7 können wir $m = 1$ annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei $a = \max(|a_i|, i = 1, \ldots, n) > 0$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$ ist insbesondere $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$ für alle i und daher ist

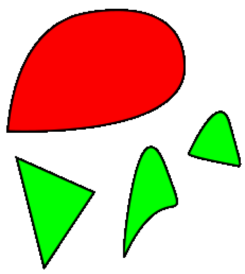
$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\Big| \\ &= \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i)\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i (x_i - y_i)| \\ &\leq na\,|x_i - y_i| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

21. Vorlesung

Die beiden nächsten Vorlesungen kann man unter dem Aspekt sehen, welche *topologischen* Eigenenschaften die reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen auszeichnen und wie sich diese Unterschiede auf stetige Abbildungen auswirken. Bereits in der achten Vorlesung wurde die intuitive Vorstellung, dass die reellen Zahlen ein „Kontinuum“ bilden, durch den Begriff der Vollständigkeit präzisiert, also durch die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Weitere mathematische Präzisierungnen dieser Vorstellung liefern die beiden Begriffe *zusammenhängend* und *kompakt.*

21.1. **Zusammenhängende Räume.**



Die rote Menge ist zusammenhängend, die grüne Menge nicht.

Definition 21.1. Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von X gibt (nämlich $\emptyset$ und X selbst), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Den leeren metrischen Raum bezeichnet man gemäß dieser Definition als nicht zusammenhängend (oder *unzusammenhängend*). Ein nichtleerer nicht zusammenhängender Raum X ist dadurch ausgezeichnet, dass man $X = A \cup B$ als disjunkte Vereinigung schreiben kann, wobei A und B beide nichtleer und in X abgeschlossen (und damit auch beide offen) sind.

In der folgenden Aussage verstehen wir unter Intervalle auch die (einseitig oder beidseitig) unbeschränkten Intervalle, wie z.B. $[a, +\infty]$.

Satz 21.2. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist T genau dann zusammenhängend, wenn T ein (nichtleeres) Intervall ist.*

Beweis. Sei zuerst T kein Intervall. Wenn T leer ist, so ist T nach Definition nicht zusammenhängend. Sei also $T \neq \emptyset$, aber kein Intervall. Dann gibt es nach Aufgabe 8.13 $x, z \in T$ und $y \notin T$ mit

$$x < y < z\,.$$

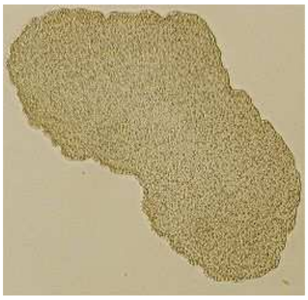
Dann ist die Menge

$$A = T \cap\,]-\infty, y[= T \cap\,]-\infty, y]$$

sowohl offen als auch abgeschlossen in T, da man A sowohl als Durchschnitt von T mit einem offenen Intervall als auch als Durchschnitt mit einem abgeschlossenen Intervall schreiben kann. Wegen $x \in A$ und $z \notin A$ ist sie weder $\emptyset$ noch T, also ist T nicht zusammenhängend. Sei nun T ein nichtleeres Intervall und sei angenommen, dass es eine Teilmenge $A \subseteq T$ mit $A \neq \emptyset, T$ gibt, die in T sowohl offen als auch abgeschlossen sei. Es sei $x \in A$ und $y \in T$, $y \notin A$. Wir betrachten das (abgeschlossene und beschränkte) Intervall $I = [x, y] \subseteq T$ (ohne Einschränkung sei $x < y$) und setzen $A' = A \cap [x, y]$. Dies ist eine in I offene und abgeschlossene Teilmenge von I, die wegen $x \in A'$ nicht leer ist und wegen $y \notin A'$ nicht ganz I ist. D.h. es genügt, die Behauptung für ein abgeschlossenes und beschänktes Intervall $I = [x, y]$ zu zeigen. Wir betrachten die reelle Zahl $s = \sup(A)$, die wegen Satz 8.9 existiert. Da ein abgeschlossenes Intervall vorliegt, gehört s zu I und aufgrund von Korollar 19.17 ist $s \in A$. Da A aber auch offen in I ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $[s - \delta, s + \delta] \cap I \subseteq A$. Da s das Supremum von A ist, folgt $s = y$. Die gleiche Argumentation für $I \setminus A$ ergibt $s \in I \setminus A$, ein Widerspruch. $\square$

Insbesondere sind also die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammenhängend. Dies gilt auch für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und für $\mathbb{R}^n$. Für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt die vorstehende Aussage nicht, dort sind nämlich nur die einpunktigen Intervalle zusammenhängend, alle anderen Intervalle sind in $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend, da es zwischen zwei rationalen Zahlen stets irrationale Zahlen gibt, mit deren

Hilfe man Teilmenge definieren kann, die zugleich offen als auch abgeschlossen sind.



Das Tierchen Trichoplax adhaerens hat merkwürdige Zusammenhangseigenschaften. Es ist ein zusammenhängender Vielzeller. Wenn man es durch ein Sieb drückt, so dass die einzelnen Zellen voneinander getrennt werden, entstehen unzusammenhängende Zellen. Diese finden dann aber wieder zueinander und es entsteht erneut ein zusammenhängendes lebendiges Tierchen.

21.2. **Zusammenhängende Räume und stetige Abbildungen.**

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist. Wir werden allgemeiner studieren, was mit einer zusammenhängenden Teilmenge unter einer stetigen Abbildung passiert.

Satz 21.3. *Seien L und M metrische Räume und sei*

$$f : L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei $S \subseteq L$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist auch das Bild

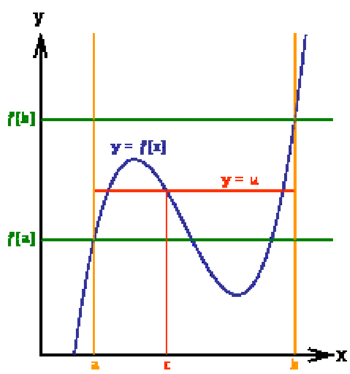
$$f(S)$$

zusammenhängend.

Beweis. Sei $f(S) = T$ und $A \subseteq T$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge, die weder leer noch ganz T sei. Die eingeschränkte Abbildung

$$f : S \longrightarrow T$$

ist ebenfalls stetig, und sie ist auch surjektiv. Daher ist $f^{-1}(A)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge in S, die ebenfalls weder leer noch ganz S ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass S zusammenhängend ist. $\square$



Satz 21.4. *(Zwischenwertsatz) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.*

Beweis. Das Intervall $I = [a, b]$ ist aufgrund von Satz 21.2 zusammenhängend. Wegen Satz 21.3 ist das Bild $f(I)$ ebenfalls zusammenhängend, und erneut wegen Satz 21.3 ist daher $f(I)$ ein Intervall. Da $f(a), f(b) \in f(I)$ sind, und c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, muss auch $c \in f(I)$ sein. D.h. es gibt ein $x \in I$ mit $f(x) = c$. $\square$

Korollar 21.5. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 21.4. $\square$

Beispiel 21.6. Die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt.

Beispiel 21.7. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann besitzt die Funktion aufgrund des Satz 21.4 eine Nullstelle in diesem Intervall. Diese kann man durch eine *Intervallhalbierung* finden. Dazu setzt man $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und betrachtet die Intervallmitte $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Man berechnet

$$f(x_0)\,.$$

Bei $f(x_0) \leq 0$ setzt man

$$a_1 := x_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(x_0) > 0$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := x_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl c ist eine Nullstelle der Funktion: Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq 0$ und das überträgt sich auf den Grenzwert c, und für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq 0$ und das überträgt sich ebenfalls auf c.

21.3. **Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion.**

Es ist keineswegs so, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen wieder stetig ist. Für stetige Funktionen auf reellen Intervallen gilt dies aber.

Satz 21.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Satz 21.3 und aus Satz 21.2. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f : I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g = f^{-1}$ und $y = f(x)$ vorgegeben. Es sei y kein Randpunkt von J. Dann ist auch x kein Randpunkt von I. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

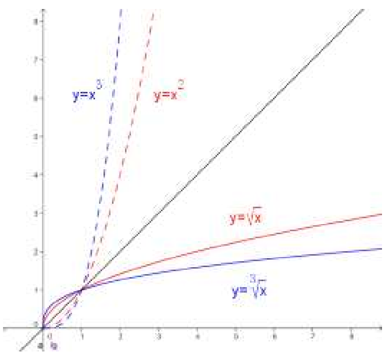
$$\delta := \min\left(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y\right) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt

$$g(y') \in [g(y - \delta), g(y + \delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon] .$$

Also ist g stetig in y. Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I, sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. $\square$

21.4. **Wurzeln.**



Satz 21.9. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die Potenzfunktionen wie angegeben surjektiv und die Umkehrfunktionen exisitieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 21.8. □

22. Vorlesung

22.1. Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Karl Weierstraß (1815-1897)

Satz 22.1. *(Bolzano-Weierstraß) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 = [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k] .$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_{k+1} > n_k$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. □

22.2. **Kompaktheit.**

Definition 22.2. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 22.3. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann kompakt, wenn jede Folge in T eine in T konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. Wenn T nicht beschränkt ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in T$ mit $d(x_n, 0) \geq n$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. Wenn T nicht abgeschlossen ist, so gibt es nach Satz 19.16 eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^m$, $x \notin T$, konvergiert. Jede Teilfolge davon konvergiert ebenfalls gegen x, so dass es keine in T konvergente Teilfolge geben kann.

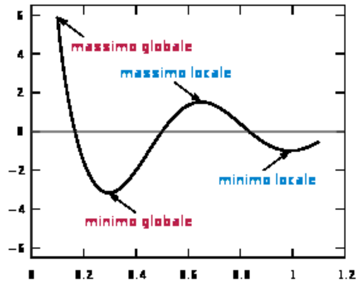
Sei nun T abgeschlossen und beschränkt, und sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ vorgegeben. Für diese Folge ist insbesondere jede Komponentenfolge $(x_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Wir betrachten die erste Komponente $i = 1$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass die erste Komponente dieser Folge konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge derart, dass auch die zweite Komponentenfolge konvergiert. Insgesamt erhält man durch dieses Verfahren eine Teilfolge, wo jede Komponentenfolge konvergiert. Nach Lemma 19.13 konvergiert dann die gesamte Teilfolge in $\mathbb{R}^m$. Da T abgeschlossen ist, liegt nach Satz 19.16 der Grenzwert in T. □

Satz 22.4. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung. Dann ist auch das Bild $f(T)$ kompakt.

Beweis. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(T)$ eine Folge, wobei wir $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \in T$ schreiben können. Da T kompakt ist, gibt es nach Satz 22.3 eine konvergente Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert auch die Bildfolge $y_{n_i} = f(x_{n_i})$ gegen $f(x)$. Damit ist eine konvergente Teilfolge gefunden und $f(T)$ ist kompakt nach Satz 22.3. $\square$



Definition 22.5. Sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt},$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch von *globalem Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des lokalen Maximums.

Ein lokales, aber kein globales Maximum der Höhenfunktion $h : S^2 \to \mathbb{R}$ auf der Erdsphäre S^2.

Definition 22.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in X$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in X$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Satz 22.7. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in T$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in T\,.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Satz 22.4 ist $f(T)$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(T) \leq M$ für eine reelle Zahl M. Wegen $T \neq \emptyset$ besitzt $f(T)$ wegen Satz 8.9 ein Supremum s in $\mathbb{R}$, das wegen der Abgeschlossenheit zu $f(T)$ gehört, also das Maximum von $f(T)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in T$ mit $f(x) = s$. □

Beispiel 22.8. Wir gehen davon aus, dass die Temperatur stetig vom Ort abhängt, d.h. die Temperatur (zu einem bestimmten Zeitpunkt) ist eine stetige Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge ist. Es hängt dann von topologischen Eigenschaften des Gebietes, für das man sich interessiert, ab, ob es einen wärmsten (oder kältesten) Punkt in G gibt. Bei $G = \mathbb{R}^3$ (dem naiven unbeschränkten Weltall) muss es keinen wärmsten Punkt geben, z. B. wenn es eine unendliche Folge von zunehmend heißeren Sonnen gibt. Auf der Erdoberfläche gibt es hingegen einen wärmsten Punkt, da die Erdoberfäche kompakt ist. Das Gleiche gilt für die gesamte Erdkugel einschließlich der Erdoberfläche. Für das Erdinnere, also die Erdkugel ohne die Erdoberfläche, muss es keinen kältesten Punkt geben, da die Erde zum Rand hin zunehmend kälter werden könnte.

Korollar 22.9. *Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{K}$ mit*

$$|\,P(z)\,| \geq |\,P(w)\,|$$

für alle $z \in \mathbb{K}$. D.h. das Minimum des Betrags eines Polynoms wird angenommen.

Beweis. Es sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

(mit $a_n \neq 0$). Wir setzen

$$a = \max(|a_i|, i = 0, \ldots, n-1) \text{ und } r := \max\left(\frac{na + |a_0| + 1}{|a_n|}, 1\right).$$

Bei $n = 0$ ist die Aussage klar, sei also $n \geq 1$. Für z mit $|z| \geq r$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \\ &\geq |a_n||z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i \\ &\geq |a_n||z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} a\,|z|^{n-1} \\ &\geq |z|^{n-1}(|a_n||z| - na) \\ &\geq |a_0| + 1 \\ &> |a_0|\,. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge $B(0,r)$ nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ nach Satz 22.7 ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $w \in B(0,r)$ mit $|P(z)| \geq |P(w)|$ für alle $z \in B(0,r)$. Wegen $|a_0| = |P(0)| \geq |P(w)|$ und der Überlegung für z mit $|z| \geq r$ ergibt sich, dass im Punkt w überhaupt das Minimum der Funktion angenommen wird. □

Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt das Minimum des Betrags eines nichtkonstanten Polynoms stets den Wert 0 - dies ist der Inhalt des *Fundamentalsatzes der Algebra*, und das vorstehende Lemma ist eine Vorstufe zu seinem Beweis.

22.3. **Gleichmäßige Stetigkeit.**

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto 1/x,$$

ist stetig. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\epsilon)$. Dabei hängt das δ nicht nur von der Zielgenauigkeit ϵ, sondern auch von x ab. Je kleiner x wird, desto steiler wird der Funktionsgraph und desto kleiner muss δ gewählt werden, damit das Bild der δ-Umgebung innerhalb der ϵ-Umgebung von $f(x)$ landet. Es gibt natürlich auch Funktionen, bei denen man zu jedem ϵ ein δ findet, dass für alle x die Stetigkeitseigenschaft sichert.

Definition 22.10. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in L$ mit $d(x, x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Satz 22.11. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei*

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum M. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für kein $\delta > 0$ die Beziehung $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$ für alle $x \in T$ erfüllt ist. Insbesondere gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ein Paar $x_n, y_n \in T$ mit $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$, aber mit $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Wegen der Kompaktheit gibt es aufgrund von Satz 22.3 eine Teilfolge $(x_m)_{m \in M}$ (dabei ist $M \subseteq \mathbb{N}$ unendlich) von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Die entsprechende Teilfolge $(y_m)_{m \in M}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren die beiden Bildfolgen $(f(x_m))_{m \in M}$ und $(f(y_m))_{m \in M}$ gegen $f(x)$. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da $d(f(x_m), f(y_m)) \geq \epsilon$ ist. $\square$

23. Vorlesung

23.1. Grenzwerte von Abbildungen.

Wir betrachten die beiden stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1/x,$$

und

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1,$$

die beide nicht im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}$ definiert sind. Offensichtlich kann man g durch die Festlegung $g(0) := 1$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Bei f hingegen ist das nicht möglich: wenn man sich auf der positiven Halbgeraden 0 annähert, wachsen die Funktionswerte gegen $+\infty$, wenn man sich auf der negativen Halbgeraden 0 annähert, so wachsen die Funktionswerte gegen $-\infty$, und somit ist jede Fortsetzung nicht stetig. Diese Beobachtung führt zum Begriff des Grenzwertes einer Abbildung, den wir insbesondere im Rahmen der Differentialrechnung verwenden werden.

Definition 23.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Berührpunkt* von T, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset\,.$$

Definition 23.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Menge aller Berührpunkte von T heißt der *Abschluss* von T. Er wird mit $\overline{T}$ bezeichnet.

Der Abschluss ist eine abgeschlossene Menge, und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die T umfasst.

Definition 23.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M. Dann heißt $b \in M$ der *Grenzwert* von f in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a, \delta)$ ist $f(x) \in U(b, \epsilon)$.

Wenn der Grenzwert exisitiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Notation 23.4. In der Situation von Definition wird der Grenzwert, falls er existiert, mit

$$\lim_{x \in T,\, x \rightarrow a} f(x) \text{ bzw. mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

bezeichnet.

Lemma 23.5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei*

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und sei $b \in M$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Abbildung f besitzt in a den Grenzwert b.*
(2) *Zu jeder offenen Menge $V \subseteq M$ mit $b \in V$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $a \in U$ und mit $f(U \cap T) \subseteq V$.*
(3) *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Da V offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U(b, \epsilon) \subseteq V$. Aufgrund von (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(T \cap U(a, \delta)) \subseteq U(b, \epsilon)$ und wir können $U = T \cap U(a, \delta)$ nehmen. (2) $\Rightarrow$ (3). Sei eine gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Für die offene Menge $V = U(b, \epsilon)$ gibt es nach (2) eine offene Menge U mit $a \in U$ und $f(U \cap T) \subseteq V$. Wegen der Offenheit von U gibt es auch ein $\delta > 0$ mit $U(a, \delta) \subseteq U$. Da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U(a, \delta)$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann $f(x_n) \in U(b, \epsilon)$, d.h. die Bildfolge konvergiert. (3) $\Rightarrow$ (1). Nehmen wir an, dass b nicht der Grenzwert ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in T$ gibt mit $x \in U(a, \delta)$ und mit $f(x) \notin U(b, \epsilon)$. Wir wenden diese Eigenschaft auf die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, an und erhalten eine Folge

$$x_n \in U(a, 1/n) \text{ und } f(x_n) \notin U(b, \epsilon)\,.$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen x, die Bildfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht gegen b, im Widerspruch zu (3). $\square$

Lemma 23.6. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f : T \to \mathbb{K}$ und $g : T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \,.$$
(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.6. □

Beispiel 23.7. Wir betrachten den Limes
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \,,$$
wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}. \end{aligned}$$
Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt $1/4$.

23.2. **Fortsetzung von stetigen Abbildungen.**

Definition 23.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei
$$f : T \longrightarrow M$$
eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq X$. Dann heißt eine Abbildung
$$\tilde{f} : \tilde{T} \longrightarrow M$$

eine *stetige Fortsetzung* von f, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in T$.

Satz 23.9. *Es seien L und M metrische Räume, $T \subseteq L$ eine Teilmenge und*

$$f : T \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine stetige Abbildung. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ und für jedes $a \in \tilde{T} \setminus T$ existiere der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$. Dann ist die durch

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a)\,, & \text{falls } a \in T\,, \\ \lim_{x \to a} f(x), & \text{falls } a \in \tilde{T} \setminus T\,, \end{cases}$$

definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von f auf $\tilde{T}$.

Beweis. Sei $a \in \tilde{T}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da a ein Berührpunkt von T ist und da der Grenzwert von f in a existiert (bei $a \in T$ exisitiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$ für alle $x \in T$, $d(x, a) \leq \delta$. Sei nun $y \in \tilde{T}$ mit $d(y, a) \leq \delta/2$. Es gibt ein $x \in T$ mit $d(x, y) \leq \delta/2$ und mit $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$. Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an y ist $d(x, a) \leq \delta$. Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \leq d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon.$$

$\square$

Satz 23.10. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge mit dem Abschluss $\overline{T}$. Es sei*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 23.9 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit $d(x, x') \leq \delta$. Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen a konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen a konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. $\square$

Korollar 23.11. *Es sei*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 23.10 und aus $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

23.3. **Reelle Exponentialfunktionen.**

Für jede positve reelle Zahl b und $n \in \mathbb{Z}$ ist b^n eine positive reelle Zahl. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_+$ und eine positive reelle Zahl y ist $y^{1/m}$ definiert. Für eine rationale Zahl $q = n/m$ ist daher $b^q = (b^n)^{1/m}$ definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von q.

Lemma 23.12. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(2) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.11. □

Lemma 23.13. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir betrachten Intervalle der Form $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \leq m := \max{(b^n, b^{-n})}$$

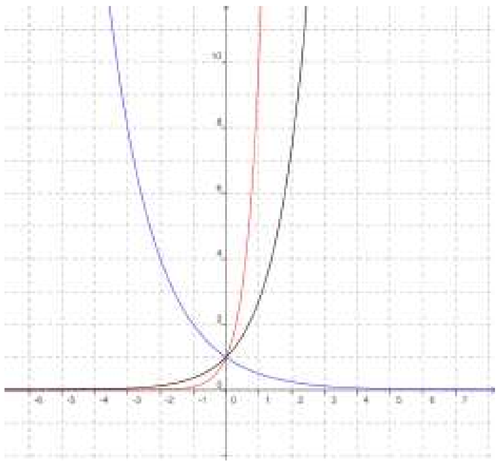
für alle $q \in [-n, n]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(b^{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, daher gibt es insbesondere ein k derart, dass

$$|\, b^{1/k} - 1 \,| \leq \epsilon/m$$

ist. Wir setzen $\delta = 1/k$. Dann gilt für zwei beliebige rationale Zahlen $q, q' \in [-n, n]$ mit $|\, q' - q \,| \leq \delta$ unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen

$$|\, b^{q'} - b^q \,| = |\, b^{q'}/b^q - 1 \,|\ b^q \ \leq |\, b^{q'-q} - 1 \,|\ m \ \leq\ \epsilon/m \cdot m \ =\ \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10$, $\frac{1}{2}$ und e.

Aufgrund von Lemma 23.13 und Korollar 23.11 lassen sich die zunächst nur auf $\mathbb{Q}$ definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

Definition 23.14. Sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b.

Lemma 23.15. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.12. $\square$

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis $b = e$. Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

24. Vorlesung

24.1. Reihen.

Wir betrachten Reihen von komplexen Zahlen.

Definition 24.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert.* In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Lemma 24.2. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.1. □

Lemma 24.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.*
(2) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_n = \lambda a_n$ konvergent mit der Summe λs.*

Beweis. Siehe Aufgabe 24.3. □

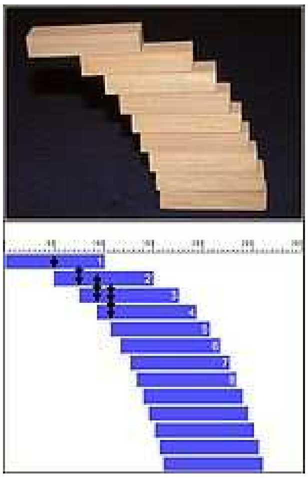
Lemma 24.4. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 24.2. □



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Beispiel 24.5. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \Big) = 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.8 nicht konvergent sein.

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Satz 24.6. *(Leibnizkriterium für alternierende Reihen) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k$.*

Beweis. Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k\,.$$

Wir betrachten die Teilfolge mit geradem Index. Für jedes n gilt wegen $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$ die Beziehung

$$s_{2(n+1)} \;=\; s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} \;\leq\; s_{2n},$$

d.h. diese Teilfolge ist fallend. Ebenso ist die Folge der ungeraden Teilsummen wachsend. Es gelten die Abschätzungen

$$s_0 \;\geq\; s_{2n} \;\geq\; s_{2n-1} \;\geq\; s_1.$$

Daher sind die beiden Teilfolgen fallend und nach unten beschränkt bzw. wachsend und nach oben beschränkt, und daher wegen Korollar 8.10 konvergent. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = x_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ stimmen die Grenzwerte überein. □

24.2. **Absolute Konvergenz.**

Definition 24.7. Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,a_k\,|$$

konvergiert.

Satz 24.8. *Eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$\mid \sum_{k=m}^{n} \mid a_k \mid \mid = \sum_{k=m}^{n} \mid a_k \mid \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\mid \sum_{k=m}^{n} a_k \mid \leq \mid \sum_{k=m}^{n} \mid a_k \mid \mid \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 24.9. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 24.8 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

und zwar ist ihr Grenzwert $\ln 2$, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 24.5 divergiert.

Satz 24.10. *(Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\mid a_k \mid \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

24.3. Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $z \in \mathbb{C}$, es geht also um die Summe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots .$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von z ab.

Satz 24.11. *Für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} .$$

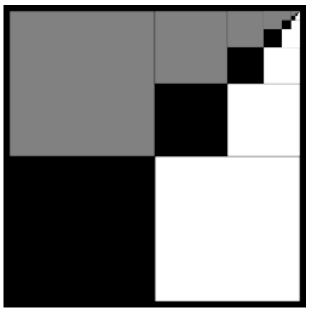
Beweis. Für jedes z gilt die Beziehung

$$(z-1)(\sum_{k=0}^{n} z^k) = z^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $z \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|z| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$. ☐



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $z = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Satz 24.12. *(Quotientenkriterium) Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (Insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. Die Konvergenz[37] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k \;=\; \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \;\leq\; a_0 q^k .$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. $\square$

24.4. **Summierbarkeit.**

Bei einer Reihe sind die aufzusummierenden Glieder durch die natürlichen Zahlen geordnet. Häufig kommt es vor, dass diese Ordnung verändert wird. Dafür ist es sinnvoll, einen Summationsbegriff zu besitzen, der unabhängig von jeder Ordnung der Indexmenge ist. Wir werden diese Theorie nicht systematisch entwickeln, sondern nur den großen Umordnungssatz beweisen, den wir bald für das Entwickeln einer Potenzreihen in einem neuen Entwicklungspunkt benötigen. Die Familie sei gegeben als a_i , $i \in I$. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ kann man die zugehörigen Glieder aufsummieren, und wir setzen

$$a_E = \sum_{i \in E} a_i \,.$$

Eine sinnvolle Aufsummierung der gesamten Familie muss Bezug auf diese endlichen Teilsummen a_E nehmen.

Definition 24.13. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung

$$|\, a_E - s \,| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_E = \sum_{i \in E} a_i$. Im summierbaren Fall heißt s die *Summe* der Familie.

Definition 24.14. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt eine *Cauchy-Familie*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart gibt, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_0 \cap D = \emptyset$ die Beziehung

$$|\, a_D \,| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_D = \sum_{i \in D} a_i$.

[37] Wohl aber die Summe.

Lemma 24.15. *Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Dann ist die Familie genau dann summierbar, wenn sie eine Cauchy-Familie ist.*

Beweis. Sei zunächst die Familie summierbar mit der Summe s, und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon/2$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Mengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Abschätzung $\mid a_E - s \mid \leq \epsilon/2$ gilt. Für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge D gilt dann

$$\begin{aligned} \mid a_D \mid &= \mid a_D + a_{E_0} - s - a_{E_0} + s \mid \\ &\leq \mid a_D + a_{E_0} - s \mid + \mid a_{E_0} - s \mid \\ &= \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

so dass die Cauchy-Bedingung erfüllt ist. Sei nun a_i , $i \in I$, eine Cauchy-Familie. Wir brauchen zunächst einen Kandidaten für die Summe. Für jedes $n \in N_+$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ derart, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_n \cap D = \emptyset$ die Abschätzung $\mid a_D \mid \leq 1/n$ gilt. Wir können annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n gilt. Wir setzen

$$x_n := a_{E_n} = \sum_{i \in E_n} a_i \,.$$

Für $k \geq m \geq n$ gilt

$$\mid x_k - x_m \mid = \mid \sum_{i \in E_k} a_i - \sum_{i \in E_m} a_i \mid = \mid a_{E_k \setminus E_m} \mid \leq 1/m \leq 1/n,$$

da die Menge $E_k \setminus E_m$ disjunkt zu E_m ist. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergent gegen ein $s \in \mathbb{C}$. Wir behaupten, dass die Familie summierbar ist mit der Summe s. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}_+$ mit $1/n \leq \epsilon/2$. Dann ist wegen der Folgenkonvergenz $\mid x_n - s \mid \leq \epsilon/2$. Für jedes endliche $E \supseteq E_n$ schreiben wir $E = E_n \cup D$ mit $E_n \cap D = \emptyset$. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mid a_E - s \mid &= \mid a_{E_n} + a_D - s \mid \\ &\leq \mid a_{E_n} - s \mid + \mid a_D \mid \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 24.16. *Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Dann ist auch a_i , $i \in J$, summierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 24.12. □

25. Vorlesung

25.1. Der große Umordnungssatz.

Satz 25.1. *(Großer Umordnungssatz) Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe s. Es sei J eine weitere Indexmenge und zu jedem $j \in J$ sei eine Teilmenge $I_j \subseteq I$ gegeben mit $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ und $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ für $j \neq j'$.[38] Dann sind die Teilfamilien a_i , $i \in I_j$, summierbar und für ihre Summen $s_j = \sum_{i \in I_j} a_i$ gilt, dass die Familie s_j , $j \in J$, summierbar ist mit*

$$s = \sum_{j \in J} s_j \, .$$

Beweis. Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 24.16. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ mit

$$|\, a_E - s \,| \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$. Es gibt eine endliche Teilmenge $F_0 \subseteq J$ derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j \in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses F_0 für die Familie s_j , $j \in J$, die Summationseigenschaft für ϵ erfüllt. Sei dazu $F \subseteq J$ mit $F_0 \subseteq F$ endlich und $n = \#(F)$. Da die Familien a_i , $i \in I_j$, summierbar sind mit den Summen s_j, gibt es für jedes $j \in F$ ein endliches $G_{j,0} \subseteq I_j$ mit

$$|\, a_{G_j} - s_j \,| \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen $G_j \subseteq I_j$ mit $G_{j,0} \subseteq G_j$. Wir wählen nun für jedes $j \in F$ ein solches G_j so, dass zusätzlich $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$ gilt. Dann ist $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j \in F} G_j$ und daher $|\sum_{j \in F} a_{G_j} - s \,|=|\sum_{i \in E} a_i - s \,| \leq \epsilon/2$. Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\sum_{j \in F} s_j - s\,| &= |\sum_{j \in F}(s_j - a_{G_j}) + \sum_{j \in F} a_{G_j} - s\,| \\ &\leq \sum_{j \in F} |\, s_j - a_{G_j} \,| + |\sum_{j \in F} a_{G_j} - s\,| \\ &\leq n \cdot \epsilon/2n + |\sum_{i \in E} a_i - s\,| \\ &\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

[38] D.h. die I_j bilden eine disjunkte Vereinigung von I.

25.2. **Cauchy-Produkt von Reihen.**

Definition 25.2. Zu zwei Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 25.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)\,.$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,\ y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
|\, z_n - x_n y_n \,| &= |\sum_{k=0}^{n} c_k - (\sum_{i=0}^{n} a_i)(\sum_{j=0}^{n} b_j)\,| \\
&= |\sum_{0\le i\le n,\, 0\le j\le n,\, i+j>n} a_i b_j\,| \\
&\le \sum_{0\le i\le n,\, 0\le j\le n,\, i+j>n} |\, a_i \,||\, b_j \,| \\
&\le (\sum_{n/2<i\le n} |\, a_i \,|)(\sum_{j=0}^{n} |\, b_j \,|) \\
&\quad +(\sum_{n/2<j\le n} |\, b_j \,|)(\sum_{i=0}^{n} |\, a_i \,|) \\
&\le (\sum_{n/2<i\le n} |\, a_i \,|)(\sum_{j=0}^{\infty} |\, b_j \,|) \\
&\quad +(\sum_{n/2<j\le n} |\, b_j \,|)(\sum_{i=0}^{\infty} |\, a_i \,|).
\end{aligned}$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} \mid a_i \mid$ und $\sum_{n/2<j\leq n} \mid b_j \mid$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 25.17), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen und aus der Abschätzung $\mid c_k \mid \leq \sum_{i=0}^{k} \mid a_i \mid \mid b_{k-i} \mid$. □

25.3. **Potenzreihen.**

Definition 25.4. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $z \in \mathbb{C}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon das letzte Mal kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $\mid z \mid < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

25.4. **Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion.**

Definition 25.5. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \ldots .$$

Satz 25.6. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2\,|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

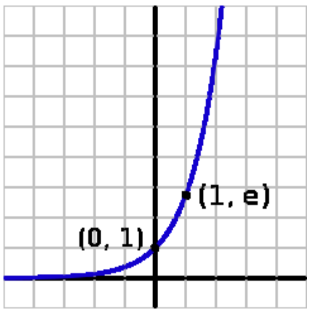
Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.

Definition 25.7. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis exp 1 ist, und dass exp 1 mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Satz 25.8. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 25.3 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z + w$ gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 25.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für reelles* z *ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für reelle Zahlen* $z > 0$ *ist* $\exp z > 1$ *und für* $z < 0$ *ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion* [39] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 25.8. (3) folgt aus Satz 25.8 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}) = \exp \frac{z}{2} \cdot \exp \frac{z}{2} = (\exp \frac{z}{2})^2 \geq 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $w > z$ ist $w - z > 0$ und daher nach (5) $\exp(w - z) > 1$, also

$$\exp w = \exp(w - z + z) = \exp(w - z) \exp z > \exp z.$$

□

25.5. Die trigonometrischen Reihen.

Definition 25.10. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

[39] Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 25.11. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \cos z\,,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin z\,,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Für $z = x + iy$ ist*

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y)\,.$$

(2) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(3) *Es ist* $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$.
(4) *Es ist*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,.$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,.$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,.$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 25.8 gilt

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot \exp(iy),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y\,. \end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2} \\ &= \frac{\exp(iz)\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2} \\ &= \frac{1}{2}((\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) \\ &\quad +(\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos z \cos w \\ &\quad +i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\ &\quad + \cos z \cos w \\ &\quad -i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\ &\quad - \sin z \sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w\,. \end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Cosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

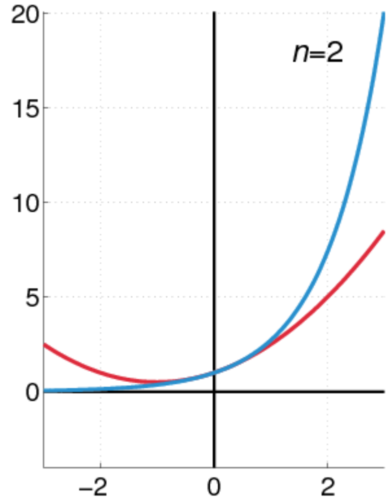
$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \cos(z-z) \\ &= \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\ &= \cos z \cos z + \sin z \sin z\,. \end{aligned}$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x,y) |\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden

26. Vorlesung

26.1. Funktionenfolgen.



Eine (gestauchte) Darstellung der ersten zwei polynomialen Approximationen der reellen Exponentialfunktion.

Wir haben das letzte Mal gesehen, dass die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stellt also die Polynomfunktion

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$$

eine „approximierende Funktion" für die Exponentialfunktion dar. Dabei ist allerdings die Güte der Approximation abhängig von z. In dieser Vorlesung werden verschiedene Konzepte vorstellen, wie man eine Funktion als Grenzfunktion einer Funktionenfolge auffassen kann. Eine unmittelbare Anwendung wird sein, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Definition 26.1. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n : T \longrightarrow M,$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

Wenn eine punktweise konvergente Funktionenfolge vorliegt, so wird durch

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

eine sogenannte *Grenzfunktion* $f : T \to M$ definiert. Selbst wenn sämtliche Funktionen stetig sind, muss diese Grenzfunktion nicht stetig sein. Dazu braucht man einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 26.2. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n : T \longrightarrow M,$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion

$$f : T \longrightarrow M$$

gibt derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T\,.$$

Beispiel 26.3. Es sei $T = [0,1]$ und

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n.$$

Für jedes $x \in [0,1]$, $x < 0$, konvergiert die Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 und für $x = 1$ liegt die konstante Folge zum Wert 1 vor. Die Grenzfunktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1\,, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig, obwohl alle f_n stetig sind.

Lemma 26.4. *Es seien L und M metrische Räume und es seien*

$$f_n : L \longrightarrow M$$

stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in L$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in L$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in L$ mit $d(x,y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

26.2. **Das Konvergenzkriterium von Weierstraß.**

Definition 26.5. Es sei T eine Menge und

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\| f \| := \| f \|_T = \sup\left(| f(x) |, x \in T \right)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Die folgende Aussage heißt das *Konvergenzkriterium von Weierstraß*. Es geht darin um Funktionenfolgen f_n, die als Partialsummen $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ von Funktionen g_k gegeben sind, wie dies auch bei Potenzreihen der Fall ist.

Satz 26.6. *(Konvergenzkriterium von Weierstraß)*
Es sei T eine Menge und sei

$$g_k : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktionenfolge mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| g_k \| < \infty \, .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ (also die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$) gleichmäßig und punktweise absolut gegen eine Funktion

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Sei $x \in T$. Wegen $| g_k(x) | \leq \| g_k \|$ ist aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} | g_k(x) |$ absolut konvergent, und das bedeutet, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ punktweise absolut konvergiert. Wir setzen $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$. und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \, .$$

Wir wollen zeigen, dass die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund des Cauchy-Kriteriums für Reihen gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \| g_k \| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit haben wir für $n \geq n_0$ insgesamt die Abschätzung

$$| f_n(x) - f(x) | = | \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} | g_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| g_k \| \leq \epsilon.$$

$\square$

26.3. **Konvergenz von Potenzreihen.**

Es seien c_n, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktionenfolge f_n mit

$$f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k .$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist dies eine Potenzreihe in $z-a$. Im Folgenden werden wir auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit variablem z als Potenzreihe bezeichnen. Dabei heißt a der *Entwicklungspunkt der Potenzreihe.* Im Allgemeinen konvergiert diese Funktionenreihe weder punktweise auf ganz $\mathbb{C}$ noch gleichmäßig. Wir werden aber sehen, dass häufig auf geeigneten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Lemma 26.7. *Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sei für eine komplexe Zahl $z = b$, $b \neq a$, konvergent. Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0 < r <\mid b-a \mid$ die Potenzreihe $f(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,r)$ punktweise absolut und gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir werden Satz 26.6 auf $T = B(a,r)$ anwenden. Wegen der Konvergenz für $z = b$ sind die Summanden $c_n(b-a)^n$ nach Lemma 24.4 eine Nullfolge, d.h. es gibt insbesondere ein $M > 0$ mit

$$\mid c_n (b-a)^n \mid \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gelten für jedes $z \in B(a,r)$ die Abschätzungen

$$\mid c_n(z-a)^n \mid = \mid c_n (b-a)^n \mid \cdot \mid \frac{z-a}{b-a} \mid^n \leq\ M \cdot \mid \frac{z-a}{b-a} \mid^n \leq\ M\left(\frac{r}{\mid b-a \mid}\right)^n .$$

Dabei ist nach Voraussetzung $\frac{r}{|b-a|} < 1$. Daher liegen rechts die Summanden einer nach Satz 24.11 konvergenten geometrische Reihe vor. Deren Grenzwert liefert eine obere Schranke für die Reihe der Supremumsnormen. □

Definition 26.8. Für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

heißt

$$\sup \left(\mid b-a \mid, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (b-a)^n \text{ konvergiert}\right)$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Das ist eine nichtnegative reelle Zahl oder $= \infty$.

Jede Potenzreihe hat also grundsätzlich das gleiche Konvergenzverhalten: Es gibt eine Kreischeibe (die eben durch den Konvergenzradius bestimmt ist, wobei die Extremfälle $r = 0$ und $r = \infty$ erlaubt sind) um den Entwicklungspunkt, in deren Innerem die Potenzreihe konvergiert und so, dass sie außerhalb davon in keinem Punkt konvergiert. Nur auf dem Rand der Kreisscheibe kann alles mögliche passieren. Der Fall $r = 0$ ist nicht sehr interessant. Bei positivem Konvergenzradius (einschließlich dem Fall $r = \infty$) sagt man auch, dass die Potenzreihe konvergiert.

Korollar 26.9. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius r. Dann stellt die Potenzreihe $f(z)$ auf der offenen Kreisscheibe $U(a, r)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Jeder Punkt $z \in U(a, r)$ liegt im Innern einer abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a, s) \subseteq U(a, r)$ mit $s < r$. Auf dieser abgeschlossenen Kreisscheibe ist die Potenzreihe nach Lemma 26.7 gleichmäßig konvergent, daher ist nach Lemma 26.4 die Grenzfunktion stetig. □

Korollar 26.10. *Die Exponentialreihe und die trigonometrischen Reihen Sinus und Kosinus besitzen einen unendlichen Konvergenzradius, und die komplexe Exponentialfunktion, die komplexe Sinusfunktion und die komplexe Kosinusfunktion sind stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.6 und Korollar 26.9. □

Korollar 26.11. *Für die (durch die Exponentialreihe definierte) reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

gilt

$$\exp x = (\exp 1)^x\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.8, aus Korollar 26.10 und aus Aufgabe 23.10. □

Die reelle Zahl $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ stimmt mit der als $e = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ eingeführten *eulerschen Zahl* überein, was wir aber noch nicht bewiesen haben. Aufgrund dieses Sachverhaltes und der vorstehenden Aussage schreiben wir häufig $e^z = \exp z$, und zwar auch für komplexe Argumente.

26.4. **Rechenregeln für Potenzreihen.**

Satz 26.12. *(Entwicklungssatz)*
Es sei

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ *und sei* $b \in U(a, R)$*. Dann gibt es ein konvergente Potenzreihe*

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$

mit Entwicklungspunkt b *und mit einem Konvergenzradius* $s \geq R - \mid a-b \mid > 0$ *derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf* $U(b, s)$ *übereinstimmen. Die Koeffizienten von* h *sind*

$$d_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n (b-a)^{n-i}$$

und insbesondere ist

$$d_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (b-a)^{n-1} .$$

Beweis. Zur Notationsvereinfachung sei $a = 0$, $b \in U(0, R)$ und $z \in U(b, R - \mid b \mid)$. Wir betrachten die Familie

$$x_{ni} = c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i},\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{0, \ldots, n\} .$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Familie summierbar ist. Dies folgt aus der Abschätzung (unter Verwendung von Aufgabe 24.19)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,\ldots,N,\, i=0,\ldots,n} \mid c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \mid &= \sum_{n=0}^{N} \mid c_n \mid \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mid z-b \mid^i \mid b \mid^{n-i}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \mid c_n \mid (\mid z-b \mid + \mid b \mid)^n \end{aligned}$$

und daraus, dass wegen $\mid z-b \mid + \mid b \mid < R$ die rechte Seite für beliebiges N beschränkt ist. Wegen der Summierbarkeit gelten aufgrund des großen Umordnungssatzes die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((z-b)+b)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i}\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N},\, i=0,\ldots,n} c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n b^{n-i}\Big)(z-b)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i . \end{aligned}$$

□

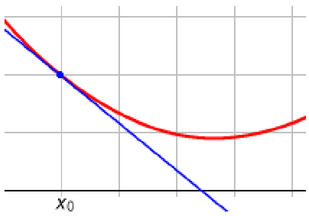
27. Vorlesung

27.1. Differenzierbare Funktionen.

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in $\mathbb{K}$ ist.



Definition 27.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

Definition 27.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{K}$. Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 27.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 27.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a + h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

Satz 27.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)\,.$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} r(x) = \lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s\right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = r(x) + s\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

Korollar 27.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 27.5. □

Lemma 27.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f+g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$
(3) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$
(4) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$
(5) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 27.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s+\tilde{s})(x-a) + (r+\tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 23.6 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 27.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \rightarrow a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). □

Satz 27.8. *(Kettenregel) Seien*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 27.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad +s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (g'(f(a))r(x) \\ &\quad +s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) = g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □

Satz 27.9. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Seien D und E zwei offene Mengen in $\mathbb{K}$ und sei*

$$f : D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1} : E \longrightarrow D$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y-b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E\setminus\{b\}$, die gegen b konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von f^{-1} konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a konvergiert. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = (\lim_{n\mapsto\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a})^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

Beispiel 27.10. Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$, deren Ableitung $f'(x) = 2x$ ist. Nach Satz 27.9 ist daher

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$, deren Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist. Dies ist für $x \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 27.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

27.2. **Höhere Ableitungen.**

Definition 27.11. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f'(x),$$

heißt die Ableitung von f.

Definition 27.12. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f n-mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

28. Vorlesung

In diesem Abschnitt untersuchen wir mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumverhalten aussieht. Da man nur reelle Zahlen der Größe nach miteinander vergleichen kann, nicht aber komplexe Zahlen, muss die Wertemenge reell sein. Die Definitionsmenge könnte grundsätzlich beliebig sein, und wir werden im zweiten Semester entsprechende Überlegungen für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ anstellen, hier ist aber die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ bzw. ein Teilintervall davon.

Satz 28.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist

$$f'(a) = 0\,.$$

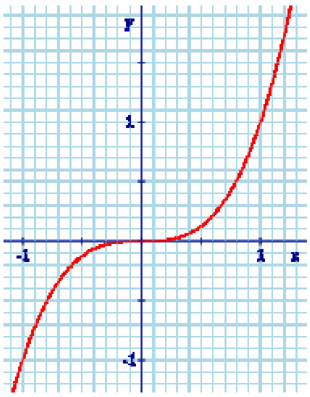
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in a besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a - \epsilon \leq s_n < a$, die gegen a („von unten“) konvergiere. Dann ist

$$\frac{f(s_n) - f(a)}{s_n - a} \geq 0\,,$$

was sich dann auf den Limes überträgt. Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a + \epsilon \geq t_n > a$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} \leq 0\,.$$

Nach Voraussetzung existiert der Differentialquotient, d.h. für jede gegen a konvergente Folge existiert der Limes und besitzt stets den gleichen Wert. Also muss dieser Grenzwert 0 sein. $\square$



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

28.1. **Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.**

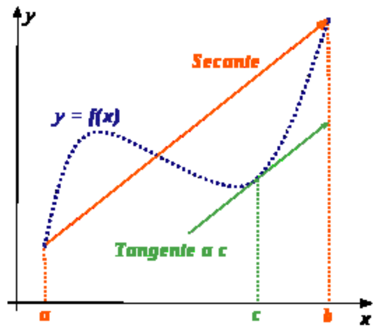
Satz 28.2. *(Satz von Rolle) Sei $a < b$ und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a,b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $c \in [a,b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 28.1. $\square$



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Satz 28.3. *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $a < b$ und sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, in $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 28.2 und somit gibt es ein $c \in]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

$\square$

Korollar 28.4. *Sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, in $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 28.3 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 28.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) ist für alle $x \in I$.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. Es genügt, die Aussagen mit wachsend zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x + h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0 ist. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I gibt mit $f(x) > f(x')$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

Korollar 28.6. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Abschnitte unterteilen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 28.5. □

28.2. **Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital.**

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

Satz 28.7. *Es sei $b > a$ und*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.2, angewendet auf die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x) .$$

□

L 'Hôspital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

Korollar 28.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die in $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w = \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 28.7, angewandt auf $I_n = [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. □

Beispiel 28.9. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

29. Vorlesung

29.1. Ableitung von Potenzreihen.

Satz 29.1. *Es sei*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

eine

konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g dargestellte Funktion f ist in jedem Punkt $z \in U(a, R)$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \tilde{g}(z).$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Wegen $n \leq (\frac{r}{s})^n$ für n hinreichend groß ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} n |a_n| s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|\,s^{n-1} + \frac{1}{s}\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\,r^n,$$

so dass die Potenzreihe $\tilde{g}$ in $B(a,s)$ und somit in $U(a,R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von $\tilde{g}$ nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 29.2). Die Potenzreihe

$$\rho(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung

$$f(z) = f(a) + a_1(z-a) + \rho(z)(z-a)\,,$$

dass f in a differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a)$. Sei nun $b \in U(a,R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b,

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n\,,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(b-a)^{n-1}$$

gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung $\tilde{h}$)

$$f'(b) = \tilde{h}(b) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(b-a)^{n-1} = \tilde{g}(b).$$

$\square$

Satz 29.2. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp{}'(z) = \exp z\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 29.1 ist

$$\begin{aligned} \exp{}'(z) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z^n}{n!}\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

□

Korollar 29.3. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.4. □

Korollar 29.4. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}\,.$$

Beweis. Nach Aufgabe 26.10 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 29.2 und Satz 29.3 gleich

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Korollar 29.5. *Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit*

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp 1\,.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Satz 29.3 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\exp 1 = \exp(\lim_{n\to\infty}(n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})))$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \exp(n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \\ &= e. \end{aligned}$$

□

Satz 29.6. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(z) = \cos z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z\ .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.10. □

29.2. **Die Zahl π.**

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 29.7. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}(1 - \frac{4}{3\cdot 4}) - \frac{2^6}{6!}(1 - \frac{4}{7\cdot 8}) - \ldots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \\ &\le -1/3. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 29.6

$$\cos{}' x = -\sin x \,.$$

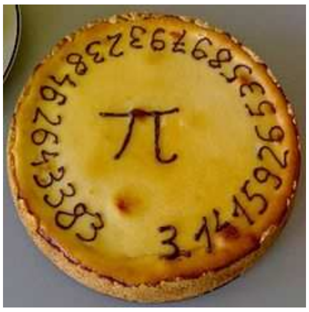
Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 28.5 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
&= x(1 - \frac{x^2}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}) + \ldots \\
&\geq x(1 - \frac{4}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{4}{6 \cdot 7}) + \ldots \\
&\geq x/3 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

Definition 29.8. Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0,2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi = 2r \,.$$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

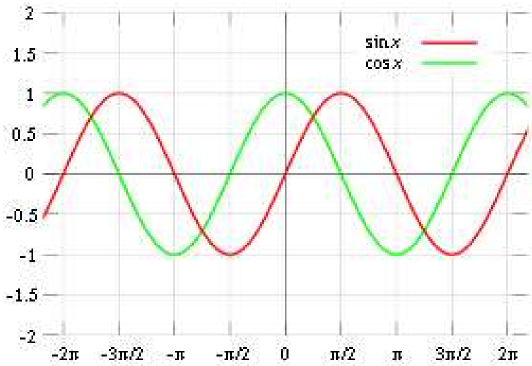
Satz 29.9. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{C}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ *und* $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(2) *Es ist* $\cos(z + \pi) = -\cos z$ *und* $\sin(z + \pi) = -\sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(3) *Es ist* $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$ *und* $\sin(z + \pi/2) = \cos z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(4) *Es ist* $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ *und* $\cos 2\pi = 1$.
(5) *Es ist* $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ *und* $\sin 2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos\, z\,)^2 + (\,\sin\, z\,)^2 = 1$$

ist $(\,\sin\, \frac{\pi}{2}\,)^2 = 1$, also ist $\sin\, \frac{\pi}{2}\, = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 29.7. Daraus folgt mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). □



Korollar 29.10. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.16. □

29.3. **Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$.**

Satz 29.11. *Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist $e^z = e^{z+2\pi i}$.*
(2) *Es ist $e^z = 1$ genau dann, wenn $z = 2\pi i n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist.*
(3) *Es ist $e^z = e^w$ genau dann, wenn $z - w = 2\pi i n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.11, aus Satz 29.11 und aus Satz 25.8. □

Insbesondere gilt also die berühmte Formel

$$e^{2\pi i} = 1\,.$$

Aus der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{i\varphi} = \cos\, \varphi\, + i\, \sin\, \varphi$$

kann man ebenso die Gleichung $e^{\pi i} = -1$ bzw. $e^{\pi i} + 1 = 0$ ablesen, die die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik enthält.

Satz 29.12. *Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ und mit $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wegen Satz 25.11 ist

$$|z| = |r||e^{i\varphi}| = |r| = r,$$

d.h. r ist als Betrag der komplexen Zahl z festgelegt. Wir können durch den Betrag teilen und können dann davon ausgehen, dass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $a^2 + b^2 = 1$ vorliegt. Es ist dann zu zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

gibt. Bei $a = 1$ (bzw. -1) ist $b = 0$ und $\varphi = 0$ (bzw. $\varphi = \pi$) ist die einzige Lösung. Wir zeigen, dass es für ein gegebenes $a \in]-1, 1[$ stets genau zwei Möglichkeiten für φ mit $a = \cos\varphi$ gibt, und eine davon wird durch das Vorzeichen von b ausgeschlossen. Bei $b \geq 0$ gibt es aufgrund von Korollar 29.10 ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$. Für dieses gilt $b = \sin\varphi$ wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \geq 0$. Bei $b < 0$ gibt es wiederum ein eindeutiges $\theta \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\theta$. Wegen $\sin\theta \geq 0$ ist dies aber keine Lösung für beide Gleichungen. Stattdessen erfüllt $\varphi := 2\pi - \theta$ beide Gleichungen. □

Die in diesem Satz beschriebene Darstellung für eine komplexe Zahl heißen ihre *Polarkoordinaten*. Zu $z = x + iy$ heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* (oder der *Winkel*) von z.

Korollar 29.13. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine komplexe Zahl w mit*

$$w^n = z\,.$$

Beweis. Bei $z = 0$ ist $w = 0$ eine Lösung, sei also $z \neq 0$. Nach Satz 29.12 gibt es eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Es sei $s = r^{1/n}$ die reelle n-te Wurzel von r, die nach Satz 21.9 existiert. Wir setzen

$$w = se^{\frac{i\varphi}{n}}\,.$$

Dann ist nach Satz 25.8

$$w^n = (se^{\frac{i\varphi}{n}})^n = s^n(e^{\frac{i\varphi}{n}})^n = re^{n\frac{i\varphi}{n}} = re^{i\varphi} = z.$$

□

Diese letzte Aussage besagt, dass jedes Polynom der Form $X^n - z$ in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Insofern handelt es sich dabei um eine Vorstufe für den Fundamentalsatz der Algebra, den wir das nächste Mal unter Verwendung dieser Aussage beweisen werden.

30. Vorlesung

Zu einer konvergenten Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

30.1. **Die Taylor-Formel.**

Brook Taylor (1685-1731)

Definition 30.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[40] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 30.2. *(Taylor-Formel) Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

[40] Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Sei x fixiert. In Anlehnung an die zu beweisende Aussage betrachten wir zu $r \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} g_r(u) = f(x) - f(u) - f'(u)\cdot(x-u) - \frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2 - \ldots \\ - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{r}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}, \end{aligned}$$

den wir als Funktion in $u \in I$ auffassen. Es ist $g_r(x) = 0$ und wir wählen r so, dass $g_r(a) = 0$ ist, was möglich ist. Die Funktion $g(u) = g_r(u)$ ist auf dem Teilintervall $[a, x] \subseteq I$ (bzw. $[x, a]$, falls $x < a$ ist) differenzierbar und besitzt an den beiden Intervallgrenzen den Wert 0. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a, x[$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgrund der Produktregel und der Kettenregel ist (Ableitung nach u)

$$\left(\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\right)' = \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1}.$$

Daher heben sich in der Ableitung von g die meisten Terme weg und es ergibt sich

$$g'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{r}{n!}(x-u)^n.$$

Aus der Gleichung

$$0 = g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{r}{n!}(x-c)^n$$

folgt $r = f^{(n+1)}(c)$. Wenn wir dies und $u = a$ in die Anfangsgleichung einsetzen und $g_r(a) = 0$ ausnutzen, so ergibt sich die Behauptung. □

Korollar 30.3. *(Taylor-Abschätzung) Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B = \sup(|f^{(n+1)}(c)|, c \in I)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k| \le \frac{B}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 22.7, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 30.2. □

Satz 30.4. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0 .$$

Dann gelten folgende Aussagen.

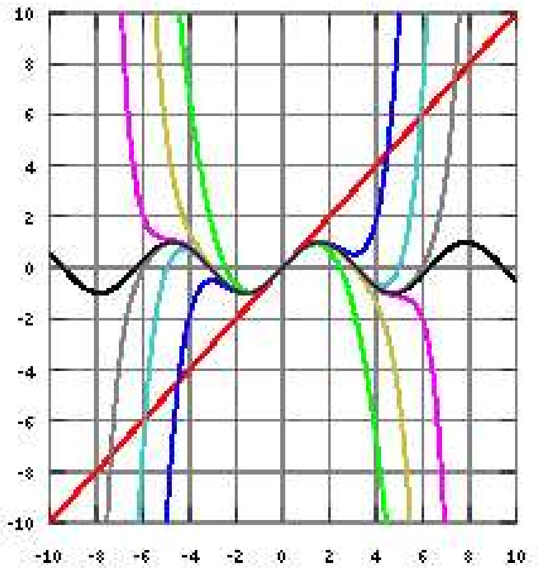
(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

30.2. **Die Taylor-Reihe.**



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 30.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 30.6. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit einem positivem Konvergenzradius r und*

$$f : U(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt a stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 29.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt a. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in a den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 29.1. $\square$

Beispiel 30.7. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

mit
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$
Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[U]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets $= 0$ ist (siehe Aufgabe 30.7 und Aufgabe 30.8). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert null und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

30.3. **Der Fundamentalsatz der Algebra.**

Wir beenden diese Vorlesung mit einem Beweis für den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra*. Er wurde erstmals 1799 von Gauß bewiesen.

Satz 30.8. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Es sei $P \in \mathbb{C}[Z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Aufgrund von Korollar 22.9 gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mid P(z) \mid \geq \mid P(z_0) \mid$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass dieses Betragsminimum 0 ist.Wir nehmen also an, dass $\mid P(z_0) \mid > 0$ ist, und müssen dann ein z_1 finden, an dem der Betrag des Polynoms kleiner wird. Durch Verschieben (d.h. indem wir die Situation in der neuen Variablen $z - z_0$ betrachten) können wir annehmen, dass das Minimum an der Stelle 0 angenommen wird, und durch Division durch $P(z_0)$ können wir annehmen, dass das Polynom im Nullpunkt den Wert 1 besitzt. D.h. wir können annehmen, dass ein Polynom
$$P = 1 + c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \ldots + c_d z^d$$
mit $k \geq 1$ und $c_k \neq 0$ vorliegt, das im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt. Wegen Korollar 29.13 gibt es ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\gamma^k = -c_k^{-1}$. Wir setzen $z = \gamma w$ (das ist eine Variablenstreckung). In der neuen Variablen w erhalten wir ein Polynom der Form
$$1 - w^k + w^{k+1} Q(w)\,,$$
das nach wie vor im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt (hierbei ist $Q(w) \in \mathbb{C}[w]$ ein Polynom). Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit $\mid Q(w) \mid \leq b$ für alle $w \in B(0,1)$. Für reelles w mit $0 < w < \min(1, b^{-1})$ gilt
$$\begin{aligned} \mid 1 - w^k + w^{k+1} Q(w) \mid &\leq \mid 1 - w^k \mid + \mid w^{k+1} Q(w) \mid \\ &= 1 - w^k + w^{k+1} \mid Q(w) \mid \\ &= 1 - w^k (1 - w \mid Q(w) \mid) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Wir haben also Stellen gefunden, wo der Betrag des Polynoms einen kleineren Wert annimmt, ein Widerspruch. □

Arbeitsblätter

1. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.2. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) : x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) : x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) : \mid x \mid = 3 \text{ und } \mid y \mid \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) : 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) : xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) : xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) : xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) : 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) : 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.3. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.4. Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 1.5. Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt.

(Eine solche Abbildung heißt *Transposition*).

Aufgabe 1.6. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 1.7. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 1.8. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f auch injektiv.

In der folgenden Aufgabe wird zu zwei Mengen S und T die *Menge der Abbildungen* von S nach T verwendet, also

$$\operatorname{Abb}(S, T) = \{f : S \to T : f \text{ Abbildung}\}.$$

Aufgabe 1.9. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathrm{Abb}\,(M \times N, L) \text{ und } \mathrm{Abb}\,(M, \mathrm{Abb}\,(N, L))\,.$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 1.10. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv, surjektiv, Bild und Urbild an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.11. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretische Fassung einiger aristotelischen Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \cap C \neq \emptyset$ folgt $A \cap C \neq \emptyset$.

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$.
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.13. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.14. (2 Punkte)
Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)
Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0,1\}).$$

In der Beantwortung der folgenden Frage dürfen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und Grundtatsachen über stetige Funktionen naiv verwendet werden. Man mache sich aber schon jetzt Gedanken, welche Gesetzmäßigkeiten man verwendet. Man frage sich auch, wie die Antworten aussehen, wenn man $\mathbb{R}$ durch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ersetzt.

Aufgabe 1.16. (3 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Bestimme das Bild des Intervalls $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x \leq 1\}$, von $\{3\}$, von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in R :\ x \geq 0\}$.

Bestimme das Urbild von $\{0\}$, von $[0,1]$, von $\{3\}$, von $\mathbb{R}$, von $\mathbb{R}_{\leq 0}$ und von $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 1.17. (2 Punkte)
Betrachte auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

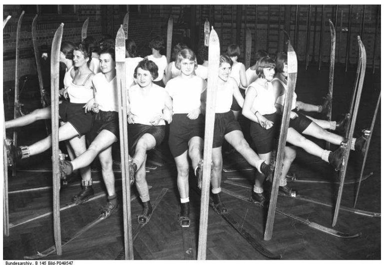
die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

2. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben



Bundesarchiv, B 145 Bild-P049547
Foto: Weinrother, Carl | 1933

Aufgabe 2.1. Welche bijektiven Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 2.2. Jedes Paket hat einen eindeutig bestimmten Absender und Empfänger. Modelliere diesen Sachverhalt mit Abbildungen bzw. Relationen. Welche Pfeildiagramme sind sinnvoll, um die Situation zu beschreiben?

Aufgabe 2.3. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 2.4. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer $0, 1, 2$ und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 2.5. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *antisymmetrisch* einer Relation R in der Relationstabelle zu R widerspiegeln.

Aufgabe 2.6. Ein Adventskranz hat vier Kerzen, wobei am ersten Advent genau eine Kerze, am zweiten Advent genau zwei Kerzen usw. brennen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Adventskranz „abzubrennen"? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Kerzen, die zuvor schon angezündet waren, wieder angezündet werden sollen, und wie viele, wenn stets so viele neue Kerzen wie möglich angezündet werden?

Aufgabe 2.7. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 2.8. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildung vorzustellen (möglichst geometrisch).

(1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bzgl. des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

Aufgabe 2.9. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

Aufgabe 2.11. (2 Punkte)

Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G : M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

Aufgabe 2.12. (3 Punkte)

Es sei M eine n-elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu M.

(In der Antwort dürfen keine Binomialkoeffizienten vorkommen.)

Aufgabe 2.13. (3 Punkte)

Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und eine fixierte natürliche Zahl $a \geq 0$. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch

$$x \sim y, \text{ wenn die Differenz } x - y \text{ ein Vielfaches von } a \text{ ist}\,,$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 2.14. (3 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2.15. (4 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?

Aufgabe 2.16. (5 Punkte)

Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir fixieren die Sprünge

$$\pm(2, 1) \text{ und } \pm(1, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b)$, $Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann (und dabei in M bleibt). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Man bestimme die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation und für jede Äquivalenzklasse genau einen besonders einfachen Vertreter. Man gebe auch einen Algorithmus an, der zu einem $(a, b) \in M$ diesen äquivalenten Vertreter findet.

Lösungen zur nächsten Aufgabe sollen über Wikimedia Commons hochgeladen werden, damit sie hier ins Skript eingebunden werden können. Lösungen können so lange eingereicht werden, bis eine optimale Lösung vorliegt.

Aufgabe 2.17. (5 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die die wesentlichen Aspekte von Beispiel 2.10 sichtbar macht.

3. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' : M \to M$ an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 3.2. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} : \, x \geq n\}$$

ebenfalls die Peanoaxiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgeabbildung?) erfüllt.

Die folgende Aufgabe sollte man nicht bearbeiten, sondern zum Anlass nehmen, sich über unser Ziffernsystem zu freuen.

Aufgabe 3.3. Man definiere, welche endlichen Zeichenketten aus I, V, X, L, C, D, M im römischen Zahlsystem (mit oder ohne Subtraktionsregel) erlaubt sind und welche nicht. Man erstelle einen Algorithmus, der zu jeder erlaubten römischen Zahl den Nachfolger berechnet.

Aufgabe 3.4. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird.

Aufgabe 3.5. Es seien L und M zwei Mengen und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq L$ eine Bijektion

$$S \longrightarrow \varphi(S)$$

vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge $T \subseteq M$ eine Bijektion

$$\varphi^{-1}(T) \longrightarrow T$$

vorliegt.

Aufgabe 3.6. Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 3.7. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3.8. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch

$$S \preccurlyeq T, \text{wenn es eine injektive Abbildung } S \to T \text{ gibt},$$

eine reflexive und transitive Relation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird, die in aller Regel weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Die folgenden Aufgaben über endliche Mengen sind intuitiv zumeist klar. Es geht aber darum, sie unter Bezug auf die Definitionen mit Hilfe von bijektiven Abbildungen zu beweisen.

Aufgabe 3.9. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $x \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass die Menge

$$\{1, \ldots, n\} \setminus \{x\}$$

die Anzahl $n - 1$ besitzt.

Aufgabe 3.10. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 3.11. Es sei M eine endliche Menge. Zeige, dass die Anzahl von M wohldefiniert ist.

Aufgabe 3.12. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 3.13. Es seien S und T endliche Teilmengen einer Menge M. Zeige, dass dann auch die Vereinigung $S \cup T$ endlich ist.

Die beiden folgenden Aufgaben verwenden das *Maximum* einer geordneten Menge. Sei $(I, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $x \in I$ heißt *maximal* (in I) oder ein *maximales Element* (von I), wenn es kein Element $y \in I$ gibt mit $x < y$.

Aufgabe 3.14. Es sei $(I, \leq)$ eine total geordnete Menge. Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere endliche Teilmenge $T \subseteq I$ ein eindeutiges Maximum besitzt.

Aufgabe 3.15. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T genau dann endlich ist, wenn T ein Maximum besitzt.

Es seien $(M_1, \leq_1)$ und $(M_2, \leq_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Ordnung definiert ist. Eine Abbildung

$$F : M_1 \longrightarrow M_2,\ x \longmapsto F(x),$$

heißt *ordnungstreu* (oder *monoton*), wenn für alle $x, x' \in M_1$ mit $x \leq_1 x'$ stets auch $F(x) \leq_2 F(x')$ gilt.

Aufgabe 3.16. Es sei $(M, \leq)$ eine endliche total geordnete Menge. Definiere für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ eine ordnungstreue bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow M,$$

wobei $\{1, \ldots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung versehen sei.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.17. (4 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Beschreibe die möglichen Zustände (also die möglichen Zeitangaben) mit Hilfe einer geeigneten Produktmenge. Definiere (mit Hilfe von geeigneten Hilfsabbildungen) die Nachfolgerabbildung, die zu jeder Zeitangabe die Zeitangabe der nächsten Sekunde berechnet.

Aufgabe 3.18. (4 Punkte)

Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto \{y \in M : x \leq y\},$$

ordnungstreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

Die folgende Aussage verwendet, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eindeutig als Produkt $n = 2^k u$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbb{N}$ ungerade schreiben lässt.

Aufgabe 3.19. (4 Punkte)

Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$xRy \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen). Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$ ergibt und skizziere exemplarisch diese Ordnung.

Zeige ferner, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren). Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Peano-Axiome?

Aufgabe 3.20. (3 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Die folgende Aufgabe ist zum jetzigen Zeitpunkt vermutlich schwierig.

Aufgabe 3.21. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

4. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Es sei S eine Menge und

$$M = \text{Abb}\,(S, S)$$

sei versehen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung. Ist die Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es ein (eindeutiges) neutrales Element, für welche $F \in M$ gibt es ein inverses Element?

Aufgabe 4.2. Sei M die Menge der Abbildungen einer zweielementigen Menge in sich selbst, also

$$M = \{F : \{0, 1\} \to \{0, 1\} : F \text{ Abbildung}\}\,.$$

Benenne die Elemente aus M und lege eine Wertetabelle für die Verknüpfung auf M an, die durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen definiert ist.

Aufgabe 4.3. Zeige, das zwei Mengen $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_2$, die beide die Peano-Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind. Man gebe also eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ an, die 0_1 in 0_2 überführt und die die Nachfolgeabbildungen respektiert.

Aufgabe 4.4. Es sei $(\mathbb{N}, 0,')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Addition durch die Bedingungen

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.5. Zeige, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ und assoziativ ist und dass die Abziehregel (d.h., dass aus $n+k = m+k$ für ein k stets $n = m$ folgt) gilt.

Aufgabe 4.6. Sei $(\mathbb{N}, 0,')$ ein Peanomodell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Multiplikation durch die Bedingungen

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.7. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion, dass die Beziehung

$$\{0, \ldots, n'\} = \{0, \ldots, n\} \cup \{n'\}$$

gilt.

(Zur Erinnerung: $\{0, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$.)

Aufgabe 4.8. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

Aufgabe 4.9. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

Aufgabe 4.10. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Aufgabe 4.11. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.12. (3 Punkte)

Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass für $x, y \in \mathbb{N}$ die Beziehung $x \leq y$ genau dann gilt, wenn es ein $z \in \mathbb{N}$ gibt mit $y = x + z$.

Aufgabe 4.13. (7 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Peanomodell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 4.10 festgelegten Multiplikation. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2)
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. 1 ist das neutrale Element für die Multiplikation.

(3)
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Multiplikation ist kommutativ.

(5) Die Multiplikation ist assoziativ.

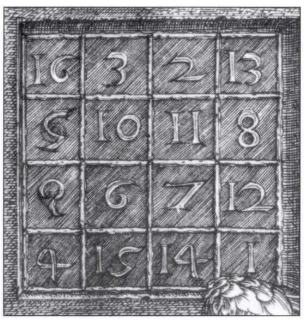
(6) Aus einer Gleichung $n \cdot k = m \cdot k$ mit $k \neq 0$ folgt $n = m$ (*Kürzungsregel*).

(7) Für beliebige $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(Distributivgesetz).

Aufgabe 4.14. (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein „magisches Quadrat" zur Seitenlänge n ist eine Anordnung der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2$ in ein $n \times n$-Quadrat derart, dass die Summe aller Zeilen, die Summe aller Spalten und die Summe der beiden Diagonalen konstant ist. Welcher Wert ist das?

Formuliere mittels Abbildungen, was ein magisches Quadrat ist, und drücken Sie die Summenbedingungen mit dem Summenzeichen und geeigneten Indexmengen aus.



Ausschnitt aus Albrecht Dürers Melencolia I.

Aufgabe 4.15. (3 Punkte)

Wir sagen, dass zwei magische Quadrate Q_1 und Q_2 äquivalent sind, wenn sie durch eine Folge aus Drehungen oder Spiegelungen ineinander überführt werden können (dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation). Zeige, dass alle magischen Quadrate zur Seitenlänge 3 untereinander äquivalent sind. Wie viele Elemente enthält die Quotientenmenge und wie viele die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 4.16. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 4.17. (2 Punkte)

Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2 \, .$$

Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

Aufgabe 4.18. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion die Abschätzung

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}} \, .$$

5. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Zeige, dass die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Beispiel 5.2 eingeführte Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c \, ,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass die auf $\mathbb{Z}$ in Beispiel 5.2 eingeführte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Aufgabe 5.3. Definiere auf der in Beispiel 5.2 eingeführten Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine totale Ordnung, die die Ordnung auf den natürlichen Zahlen fortsetzt.

In der folgenden Aufgabe wird eine alternative Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen beschrieben.

Aufgabe 5.4. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_+$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Wir betrachten die zweielementige Menge

$$V = \{+, -\}$$

und die Menge

$$Z = (V \times \mathbb{N}_+) \cup \{0\}\,.$$

Wir wollen Z zu einem Modell für die ganzen Zahlen machen. Als abkürzende Schreibweise verwenden wir n für das Paar $(+, n)$ und $-n$ für das Paar $(-, n)$. Man definiere eine Verknüpfung $\oplus$ auf Z, die für $n, m \in \mathbb{N}_+$ die Eigenschaft

$$n \oplus m = n + m$$

erfüllt und die Z zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element 0 macht.

Aufgabe 5.5. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 5.6. Zeige, dass die in Beispiel 5.6 auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ eingeführte Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 5.7. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (6) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x - z) + (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 5.8. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 5.9. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 5.10. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

Rechne dies explizit für $n \leq 6$ nach.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.11. (3 Punkte)

Es sei I eine Menge und M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$\star : M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \star y.$$

Definiere auf der Abbildungsmenge

$$\operatorname{Abb}(I,M) = \{F : I \to M :\ F \text{ Abbildung}\}$$

eine Verknüpfung unter Bezug auf die vorgegebene Verknüpfung. Übertragen sich die Eigenschaften Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes, Existenz von inversen Elementen?

In der folgenden Aufgabe darf man Gesetzmäßigkeiten auf $\mathbb{N}$ verwenden.

Aufgabe 5.12. (5 Punkte)

Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der in Beispiel 5.2 eingeführten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 5.13. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge, $s \in M$ ein Element und

$$F : M \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ k \longmapsto \varphi(k),$$

gibt, die die Eigenschaften

$$\varphi(0) = s \text{ und } \varphi(k+1) = F(\varphi(k)) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt.

In den beiden folgenden Aufgaben darf man verwenden, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einen kommutativen Ring bilden.

Aufgabe 5.14. (2 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 5.6 definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 5.15. (6 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 5.6 eingeführte Quotientenmenge $\mathbb{Q}$ mit den dort eingeführten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und den Elementen 0 und 1 ein Körper ist.

In der folgenden Aufgabe darf man verwenden, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist.

Aufgabe 5.16. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0,0) \text{ und } 1 = (1,0)\,,$$

der Addition

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

und der Multiplikation

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 5.17. (3 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 5.18. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$

6. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x \in K$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

Aufgabe 6.2. Beweise die folgenden Aussagen:

In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) $1 > 0$,
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$,
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.

Aufgabe 6.3. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass $-x < 0$ ist.

(Bemerkung: Diese Aussage kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!)

Aufgabe 6.4. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

Aufgabe 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bzgl. der Multiplikation eine Gruppe bilden.

Aufgabe 6.6. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 6.7. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 6.8. Zeige, dass der in Aufgabe 5.16 konstruierte Körper K nicht angeordnet werden kann.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften dann ebenfalls gelten.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 6.9 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\, n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

Aufgabe 6.11. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 6.12. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ exisitieren. Welches ist größer?

Aufgabe 6.13. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K : x \geq n \text{ und } x < n+1\},\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Aufgabe 6.14. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow K,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \min(x, x^{-1}) \text{ für } x > 0\,, \\ 0 \text{ für } x = 0\,, \\ \max(x, x^{-1}) \text{ für } x < 0\,. \end{cases}$$

Mögliche Fragestellungen bzw. Stichpunkte sind

- Ist die Abbildung injektiv, surjektiv?
- Was ist das Bild der Abbildung?
- Wie sehen die Urbilder aus?
- Was kann man über die Hintereinanderschaltungen φ^n sagen?
- Was kann man über das Verhalten der Abbildung bzgl. der Addition und der Multiplikation sagen, also zu $\varphi(x+y)$ und $\varphi(xy)$?
- Gibt es einen Zusammenhang zum Betrag?
- Maximum und Minimum der Funktion, Stetigkeit, Differenzierbarkeit.
- Skizze.
- Asymptotisches Verhalten.
- Symmetrien.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Definiere auf der in 5.7 konstruierten Menge $\mathbb{Q}$ eine totale Ordnung, die $\mathbb{Q}$ zu einem angeordneten Körper macht.

Aufgabe 6.16. (2 Punkte)

Betrachte die Menge

$$K = \{q + p\sqrt{5} : \, p, q \in \mathbb{Q}\} \, ,$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist. Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird. Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird. Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Aufgabe 6.17. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 6.9 konstruierte injektive Zuordnung $\mathbb{Z} \subset K$. Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen.

Aufgabe 6.18. (2 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 6.19. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass mit der Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 6.20. (3 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|,$$

in einem angeordneten Körper (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x||y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 6.21. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.

7. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 7.2. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass dann die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 7.3. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 7.4. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Q}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,

(2) $\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$,
(5) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 7.5. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.6. Schreibe ein Computer-Programm, das zu einer vorgegebenen rationalen Zahl mittels des Heron-Verfahrens die Quadratwurzel der Zahl bis auf 10 Nachkommastellen (im Dezimalsystem) genau berechnet.

Aufgabe 7.7. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 7.10.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion. Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion*.

Aufgabe 7.8. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $x \mapsto \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d , dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 7.9. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 7.10. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.11. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 7.12. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 7.13. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Aufgabe 7.14. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$(\frac{y_n}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 7.15. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.16. (8 Punkte)

Mathematiker haben, so ein weitverbreitetes Vorurteil, Schwierigkeiten, ihre Hemden korrekt zuzuknöpfen. Ein Hemd hat auf der einen Seite eine von oben nach unten geordnete Knopfreihe bestehend aus n Knöpfen und auf der anderen Seite eine ebenso geordnete Lochreihe aus n Löchern. Beide Reihen seien von oben nach unten durchnummeriert mit 1 bis n. Eine *Zuknöpfung* σ ordnet jedem Knopf genau ein Loch zu, sie ist also eine Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},\ i \longmapsto \sigma(i),$$

wobei die identische Abbildung $i \mapsto i$ als korrekte (oder triviale) Zuknöpfung gilt. Der *Zerstreutindex* $Z(\sigma)$ ist ein wichtiges nummerisches Maß[41] für die Zerstreutheit (oder Kreativität) einer Zuknöpfung σ. Er ist definiert über die Abbildung

$$Z : A_n = \mathrm{Abb}\left(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n\}\right) \longrightarrow \mathbb{N},\ \sigma \longmapsto Z(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\, i - \sigma(i)\, | \,.$$

(1) Zeige: Eine Zuknöpfung σ ist genau dann korrekt, wenn $Z(\sigma) = 0$ ist.[42]
(2) Kann eine Zuknöpfung den Zerstreutindex 1 haben? Wie sieht es bei bijektiven Zuknöpfungen aus?
(3) Bestimme
$$a_n = \max\{Z(\sigma) :\ \sigma \in A_n\}$$
in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.
(4) Es sei $B_n \subseteq A_n$ die Menge aller bijektiven Zuknöpfungen. Bestimme
$$b_n = \max\{Z(\sigma) :\ \sigma \in B_n\}$$
für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

[41]Ein solches Maß heißt auch eine *Invariante*. Es ist ein wichtiger Aspekt der Mathematik, nach Invarianten von mathematischen Objekten zu suchen, die wesentliche Eigenschaften von diesen Objekten ausdrücken. Die Berechnung von solchen Invarianten kann schwierig sein.

[42]Häufig liegt eine besondere Situation vor, wenn die Invariante den einfachsten Wert annimmt. Von daher sind Invarianten auch dafür da, einfache Objekte von schwierigen Objekten zu unterscheiden.

(5) Es sei $C_n \subseteq A_n$ die Menge aller konstanten Zuknöpfungen. Bestimme
$$c_n = \max\{Z(\sigma) : \sigma \in C_n\}$$
in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(6) Eine Zuknöpfung σ heißt *semikorrekt*,[43] wenn $Z(\sigma) \leq n$ ist. Klassifiziere[44] alle semikorrekten Zuknöpfungen bei $n \leq 3$.

8. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 8.2. Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergent ist, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 8.3. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 8.4. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge in K nach unten beschränkt ist.

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten, aber nicht nach oben beschränkt ist, und die nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

---

[43] Mit Hilfe von Invarianten kann man Eigenschaften von Objekten definieren. Eigenschaften, die „nahe" an einem gewissen Begriff sind, werden häufig so bezeichnet, dass vor den Begriff eine Vorsilbe wie „quasi-, prä-, semi-, fast-, pseudo-" etc. gestellt wird.

[44] Klassifiziere meint hier, dass man die verschiedenen Möglichkeiten auflisten soll. Es ist eine wichtige Zielsetzung innerhalb der Mathematik, eine strukturelle Übersicht über möglichst alle Objekte eines mathematischen Gebiets zu erlangen.

Aufgabe 8.7. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $c \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit $x_0 = c$ und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 8.8. Zeige, dass die in Beispiel 8.8 definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 8.9. Zeige, dass die in Beispiel 8.8 definierte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Aufgabe 8.10. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,,\, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 8.11. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 8.12. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 8.13. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.14. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen null konvergieren.

Aufgabe 8.15. (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n := \frac{f_n}{f_{n-1}} .$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Aufgabe 8.16. (4 Punkte)

Beweise Satz 8.12.

Aufgabe 8.17. (4 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ mit den dort definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

Aufgabe 8.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist.

Aufgabe 8.19. (5 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Aufgabe 8.20. (7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es im Wesentlichen nur einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper gibt, so dass man von *dem Körper der reellen Zahlen* sprechen kann. Dazu sei $\mathbb{K}$ ein vollständiger archimedisch angeordneten Körper (der nach Aufgabe 6.17 die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält) und $\mathbb{R} = C/\sim$ sei der in Beispiel 8.8 konstruierte Körper. Man zeige

(1) Die Abbildung
$$C \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_n,$$
die eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ auf den Grenzwert in $\mathbb{K}$ abbildet, ist wohldefiniert.

(2) Diese Abbildung definiert eine wohldefinierte Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K},\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(3) Die Abbildung φ schickt $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ auf $0_{\mathbb{K}}$ und $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ auf $1_{\mathbb{K}}$.

(4) Die Abbildung φ ist mit Summen und Produkten verträglich, d.h. es gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

(5) Die Abbildung φ ist bijektiv.

9. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Bundesarchiv, Bild 102-10071
Foto: o.Ang. | Juli 1930

Aufgabe 9.1. Zeige, dass das *Quadrieren*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

eine wachsende Funktion ist. Man folgere daraus, dass auch die Quadratwurzel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \sqrt{u},$$

eine wachsende Funktion ist.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen s und t die Beziehung

$$\sqrt{st} = \sqrt{s}\sqrt{t}$$

besteht.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 9.3. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 9.4. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 9.5. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Ring, aber kein Körper ist.

Aufgabe 9.7. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$.
(2) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.

(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist
$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z) .$$
(5) $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 9.8. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 9.9. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z||w|$.
(5) $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/|z|$.

Aufgabe 9.10. Bestätige die in Beispiel 9.12 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 9.11. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^2 + 5iz - 3 = 0 .$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.12. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen
$$(1+i)^n$$
für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 9.13. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 9.14. (2 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 9.15. (3 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Man charakterisiere, wann es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt und wann zwei Lösungen.

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 9.17. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 9.18. (4 Punkte)

Man schreibe eine Computeranimation, die die Intervallschachtelung für die eulersche Zahl aus Lemma 9.1 bis zum zehnten Schritt berechnet und darstellt.

10. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Zeige, dass auch das Produkt
$$V \times W$$
ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 10.2. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass
$$K^I = \mathrm{Abb}\,(I, K)$$
mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 10.3. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 10.4. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \mathrm{Abb}\,(J, K)$ in natürlicher Weise ein Unterraum von K^I ist.

Aufgabe 10.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.

(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum. Er stimmt mit dem Durchschnitt
$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum},\, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$
überein.

(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Aufgabe 10.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 10.7. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum von K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 10.8. Man gebe ein Beispiel für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem derart, dass die Lösungsmenge unendlich ist und kein Untervektorraum ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.9. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 10.10. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 10.11. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \{f \in K^I \mid f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

ein Unterraum von K^I ist.

Zu jedem $j \in I$ sei e_j gegeben durch

$$e_j(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Man zeige, dass sich jedes Element $f \in K^I$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_j, $j \in J$, darstellen lässt.

Aufgabe 10.12. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \text{ Cauchyfolge in } K\}\,.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \text{ Folge in } K\}$$

ist.

In der folgenden Aufgabe - wie bei jeder Rechenaufgabe - führen „Rechenfehler“[45] zu deutlichem Punktabzug!

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w &= 7 \\ x + z &= 9 \\ x + 5y + 5z + w &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.14. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

[45] Um das Thema Rechenfehler ranken sich weit verbreitete Mythen von Nichtmathematikern. Ein echter Rechenfehler ist so was wie $3 + 4 = 9$, doch tritt das nicht auf. In Wahrheit verbergen sich hinter „Rechenfehlern“ substantielle Denkfehler, falsches Operieren mit Vorzeichen, Fehlinterpretation von Klammern, Vertauschungen, mangelnde Organisation der zu verarbeitenden Information, schlichtes Ignorieren von relevanten Daten, unzureichende Buchführung über Zwischenergebnisse. Bei einer „Rechenaufgabe“ geht es nicht darum zu zeigen, dass man ein Verfahren verstanden hat, sondern dass man ein Verfahren korrekt durchführen kann. Zum Glück gibt es hinreichend viele Beweisaufgaben.

11. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I ,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 11.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf V, die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 11.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V, die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ gibt mit } v = \lambda w$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 11.4. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 11.5. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Aufgabe 11.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Standardbasis

$$e_i,\ i = 1, \ldots, n\,,$$

eine Basis des K^n ist.

Aufgabe 11.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 11.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 11.9. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0\,.$$

Aufgabe 11.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 11.11. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 11.12. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2+7i \\ 3-i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15+26i \\ 13-7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 11.13. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(i) = 1,\ f(1) = 1 + i,\ f(1 - 2i) = -i\,.$$

Aufgabe 11.14. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\{\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K\}$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.15. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Aufgabe 11.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 11.17. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 - 7i \\ -3 + 2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5 + 6i \\ 3 - 17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)
Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\{\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K\}$$

ist.

Aufgabe 11.19. (2 Punkte)
Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

Aufgabe 11.20. (3 Punkte)
Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

12. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 12.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $\lambda \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.[46]

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $v \in V$ die Abbildung

$$K \longrightarrow V,\ \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

Aufgabe 12.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $K \times V$ versehen mit der Vektorraumstruktur des Produktraumes (siehe Aufgabe 10.1). Betrachte die Skalarmultiplikation

$$K \times V \longrightarrow V,\ (\lambda, v) \longmapsto \lambda v.$$

Handelt es sich hierbei um eine lineare Abbildung?

Aufgabe 12.5. Ergänze den Beweis zu Satz 12.3 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 12.6. Es sei K ein Körper und seien U, V, W K-Vektorräume. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 12.7. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Unterraum von W.

[46] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor λ.

(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.

Aufgabe 12.8. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 12.9. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \mathrm{Re}\,(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \mathrm{Im}\,(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto | z |,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 12.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass V und W genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 12.11. Es sei K ein Körper. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien K-Vektorräume V_i und W_i sowie lineare Abbildungen

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow W_i$$

gegeben. Zeige, dass dann auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_n : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n$$
$$(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)(\varphi_1(v_1),\ \varphi_2(v_2),\ \ldots,\ \varphi_n(v_n)),$$

eine lineare Abbildung zwischen den Produkträumen ist.

Aufgabe 12.12. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K- Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 12.13. Zeige durch ein Beispiel von zwei Basen v, u und v, w im $\mathbb{R}^2$, dass die Koordinatenfunktion v^* von der Basis, und nicht nur von v abhängt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.14. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 12.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 12.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung ein Untervektorraum des Produktraumes $V \times W$ ist.

Aufgabe 12.17. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi : G \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa : G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für kern π, für kern κ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[47]

Aufgabe 12.18. (2 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaft gilt. $\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$ für alle $g, g' \in G$.

Aufgabe 12.19. (4 Punkte)

Seien V und W zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ bereits $\mathbb{Q}$-linear ist.

[47] Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber bspw. überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

13. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 13.2. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Aufgabe 13.3. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes k zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 13.4. Bestimme das Matrixprodukt

$$e_i \circ e_j ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 13.5. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrixprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 13.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 13.7. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe 13.8. Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s))) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile.

Aufgabe 13.9. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

Aufgabe 13.10. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 13.11. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0).$$

Berechne die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bzgl. dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 13.12. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 5-4i & 6-2i \end{pmatrix}.$$

Der Begriff „Isomorphismus“ kommt in unterschiedlichen Zusammenhängen vor. Für Körper lautet die Definition

Es seien K und L zwei Körper. Eine Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow L$$

heißt *Körper-Isomorphismus*, wenn φ bijektiv ist und wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
(2) $\varphi(1) = 1$,
(3) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Aufgabe 13.13. Zeige, dass der einzige Körper-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

die Identität ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.14. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bzgl. der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den zwei reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

Aufgabe 13.15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$(K,+,0) \longrightarrow (\operatorname{Mat}_2(K), \circ, E_n),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Betrachte auf der Produktmenge V^m die folgende Relation.

$$(v_1, \ldots, v_m) \sim (w_1, \ldots, w_m),\ \text{ falls } \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$$

Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Unterräume von

V der Dimension $\leq m$ an. Zeige ferner, dass zwei Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ genau dann in dieser Relation zueinander stehen, wenn es eine invertierbare $m \times m$-Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_m(K)$ gibt mit

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$$

für alle i.

Aufgabe 13.17. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 13.18. (5 Punkte)

Zeige, dass der einzige Körper-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Identität ist.

Aufgabe 13.19. (3 Punkte)

Wir betrachten die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Es sei

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ein Körper-Isomorphismus mit $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Zeige, dass φ entweder die Identität oder die komplexe Konjugation ist.

14. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 14.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 14.3. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 14.4. Berechne (über den komplexen Zahlen) die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 14.5. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 14.6. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

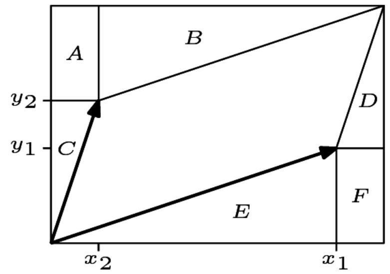
Aufgabe 14.7. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 14.8. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Multiplikation

$$K \times K = K^2 \longrightarrow K,\ (a,b) \longmapsto a \cdot b,$$

multilinear ist. Ist sie alternierend?

Aufgabe 14.9. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



Aufgabe 14.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\triangle : W^m \longrightarrow K$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die verknüpfte Abbildung

$$V^m \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \triangle(\varphi(v_1),\ \ldots,\ \varphi(v_m))$$

multilinear ist. Zeige ebenfalls, dass wenn $\triangle$ alternierend ist, dass dann auch $\triangle \circ \varphi^n$ alternierend ist, und dass hiervon bei φ bijektiv auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 14.11. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n - 1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Zeige, dass für den Rang die Beziehungen

$$\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A \text{ und } \operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$$

gelten. Zeige, dass links Gleichheit gilt, falls B invertierbar ist, und rechts Gleichheit gilt, falls A invertierbar ist. Man gebe ein Beispiel, das zeigt, dass diese Gleichheit links und rechts auch ohne diese Voraussetzungen gelten kann.

Aufgabe 14.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Untersuche die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V,W) \times V \longrightarrow W,\ (\varphi, v) \longmapsto \varphi(v),$$

auf Multilinearität.

Aufgabe 14.14. (3 Punkte)

Berechne (über den komplexen Zahlen) die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.15. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 14.16. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 14.17. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

15. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 15.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle : V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + 2v \\ v + 3w \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen.

Aufgabe 15.3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Abbildung

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n) \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

multilinear ist.

Aufgabe 15.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad + cb,$$

multilinear ist, aber nicht alternierend.

Aufgabe 15.5. Es sei K ein Körper. Ist die Abbildung

$$\mathrm{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ac - bd,$$

multilinear in den Zeilen? In den Spalten?

Aufgabe 15.6. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$).

(1) $(A^t)^t = A$.
(2) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
(3) $(sA)^t = s \cdot A^t$.
(4) $(A \circ C)^t = C^t \circ A^t$.

Aufgabe 15.7. Zeige, dass für jede Elementarmatrix E die Beziehung

$$\det E = \det E^t$$

gilt.

Aufgabe 15.8. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der sogenannte *Dualraum* zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

Aufgabe 15.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume mit Basen

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m .$$

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. dieser Basen durch die Matrix M beschrieben werde. Zeige, dass die *duale Abbildung*

$$W^* \longrightarrow V^*,\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

bzgl. der Dualbasen

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \text{ und } w_1^*, \ldots, w_m^*$$

durch die transponierte Matrix M^t beschrieben wird.

Aufgabe 15.10. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 15.11. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 15.12. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } iv_1, \ldots, iv_n$$

eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 15.13. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Aufgabe 15.14. Es sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_+$, $n \leq m$. Definiere injektive Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(K).$$

Aufgabe 15.15. Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.16. (2 Punkte)

Es sei $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$. Zeige, dass es egal ist, ob man die Determinante in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ausrechnet.

Aufgabe 15.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle : V \times V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w, z \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + v + w \\ 2u + 3z \\ 4w - 5z \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen.

Aufgabe 15.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow K$$

$(i = 1, \ldots, n)$, lineare Abbildungen. Zeige, dass dann die Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_n(v_n),$$

multilinear ist.

Aufgabe 15.19. (3 Punkte)

Löse mit der Cramerschen Regel das inhomogene lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 3 \\ x + 5y + 7z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 15.20. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Es sei T ein weiterer K-Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(W,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,T),\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

K-linear ist.

Aufgabe 15.21. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 15.22. (8 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Wir betrachten V auch als reellen Vektorraum der doppelten Dimension, worauf φ auch eine reell-lineare Abbildung ist, die wir zur Unterscheidung mit ψ bezeichnen. Zeige, dass zwischen der komplexen Determinante und der reellen Determinante die Beziehung

$$|\det \varphi|^2 = \det \psi$$

besteht.

16. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

(1) Der Eigenraum
$$\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.

(2) λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.

(3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.

Aufgabe 16.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Zeige, dass
$$\mathrm{kern}\ \varphi = \mathrm{Eig}_0(\varphi)$$
gilt.

Aufgabe 16.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass
$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0\,.$$
ist.

Aufgabe 16.4. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgabe 16.5. Zeige, dass jede Matrix
$$M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$
mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 16.6. Es sei
$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$
eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Zu einem Endomorphismus φ (bzw. einer Matrix M) bezeichnet man mit φ^n (bzw. M^n) die n-fache Hintereinanderschaltung (bzw. Verknüpfung) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen.*

Aufgabe 16.7. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 16.8. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 1$,Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 16.9. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass die ersten $n^2 + 1$ Potenzen

$$M^i, i = 0, \ldots, n^2,$$

linear abhängig in $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind.

Die nächsten Aufgaben verwenden die beiden folgenden Begriffe:

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n gibt derart, dass die n-te Hintereinanderschaltung

$$\varphi^n = 0$$

ist.

Eine quadratische Matrix M heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass das n-te Matrixprodukt

$$M^n = \underbrace{M \circ \cdots \circ M}_{n-\text{mal}} = 0$$

ist.

Aufgabe 16.10. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi^n = 0$ ist, wobei n die Dimension von V bezeichnet.

Aufgabe 16.11. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von φ ist.

Aufgabe 16.12. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Determinante von φ?

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 16.13. Was ist die Determinante einer Streckung?

Aufgabe 16.14. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

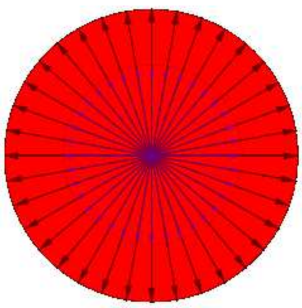
$$U = \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U : U \longrightarrow U,\ v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 16.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

Aufgabe 16.16. (3 Punkte)

Es sei M eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente null seien. M hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass M nilpotent ist.

Aufgabe 16.17. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 16.18. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}) .$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert

besitzt.

Aufgabe 16.19. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[48] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

[48]Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

Aufgabe 16.20. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis $v, u_2, \ldots, u_n$ von V eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i,\, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.

Aufgabe 16.21. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\varphi^* : \operatorname{Hom}_K(V, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, K),\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

die dazu duale Abbildung. Zeige, dass jeder Eigenwert von φ auch ein Eigenwert von φ^* ist.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 16.22. (bis 10 Punkte)

Man lege eine Serie von Skizzen (hochladbare Computergraphik) an, die die typische Wirkungsweise (bspw. auf gewissen Figuren) von linearen Abbildungen der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ in sich veranschaulicht. Insbesondere sollen auch Eigenräume illustriert werden.

17. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 17.2. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 17.3. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich null sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 17.4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi : K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$,
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$,
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 17.5. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 17.6. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 17.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 17.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\operatorname{End}(V) = \{\varphi : V \to V \,|\, \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Aufgabe 17.9. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$-X^3 + 6X^2 - 6X + 27$$

die Variable X durch die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Aufgabe 17.10. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\mathrm{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 17.11. Zeige durch Induktion, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 17.12. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 17.13. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.14. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 17.15. Es sei K der Körper mit zwei Elementen und betrachte darüber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_M nicht das Nullpolynom ist, dass aber

$$\chi_M(\lambda) = 0$$

ist für alle $\lambda \in K$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.16. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i).$$

Aufgabe 17.17. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 17.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

Aufgabe 17.19. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt

Aufgabe 17.20. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.22. (8 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring, der die Eigenschaft erfüllt: wenn $rs = 0$ ist, so ist $r = 0$ oder $s = 0$. Zeige, dass man auf folgende Weise einen Körper K konstruieren kann, der R enthält.

Wir betrachten auf

$$M = R \times (R \setminus \{0\})$$

die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

definierte Relation.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Definiere auf der Quotientenmenge $Q(R)$ Verknüpfungen derart, dass $Q(R)$ zu einem Körper wird und dass

$$\varphi : R \longrightarrow Q(R),\ r \longmapsto [(r, 1)],$$

mit Addition und Multiplikation verträglich ist und $\varphi(1) = 1$ ist.

Aufgabe 17.23. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei

$$P = \{F \in K[X] |\, \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}\,.$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

(1) Entweder $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 17.24. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 17.23, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

18. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18.2. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_M. Zeige direkt, dass
$$\chi_M(M) = 0$$
gilt.

Die beiden nächsten Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt
$$\operatorname{Spur} M := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
die *Spur* von M.

Aufgabe 18.3. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Spur M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 18.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also
$$\chi_M = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k}.$$
Zeige, dass
$$\operatorname{Spur} M = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$
ist.

Aufgabe 18.5. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 18.6. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 18.7. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$|| v + w ||^2 = || v ||^2 + || w ||^2 \ .$$

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $U_1, \ldots, U_m$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Man sagt, dass V die *direkte Summe* der U_i ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erüllt sind.

(1) $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$.
(2) Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung

$$v = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$$

mit $u_i \in U_i$.

Aufgabe 18.8. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass V die direkte Summe aus U und dem orthogonalen Komplement $U^{\perp}$ ist.

Aufgabe 18.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(|| v + w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2)$$

gilt.

Aufgabe 18.10. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v + w ||^2 + || v - w ||^2 = 2 \ || v ||^2 + 2 \ || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 18.11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u, v, w \in V$).

(1) Es ist $d(v,w) \geq 0$.
(2) Es ist $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
(3) Es ist $d(v,w) = d(w,v)$.
(4) Es ist
$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)\,.$$

Aufgabe 18.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$
eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.13. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m,n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 18.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn V die direkte Summe seiner Eigenräume ist.

Aufgabe 18.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und seien $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$ Matrizen, die in der Beziehung
$$M = BNB^{-1}$$
mit einer invertierbaren Matrix $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ stehen. Zeige, ohne das charakteristische Polynom zu verwenden, dass
$$\operatorname{Spur} N = \operatorname{Spur} M$$
ist.

Aufgabe 18.17. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann nilpotent ist, wenn das charakteristische Polynom $\chi_\varphi = X^n$ ist.

Aufgabe 18.18. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wir betrachten im Polynomring $K[X]$ die Teilmenge

$$I = \{P \in K[X] |\, P(M) = 0\}\,.$$

Es sei $F \in K[X]$, $F \neq 0$, derart, dass es in I kein Polynom von kleinerem Grad gibt. Zeige: Jedes Element $G \in I$ kann man schreiben als

$$G = FQ$$

mit einem $Q \in K[X]$.

Aufgabe 18.19. (3 Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Aufgabe 18.20. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \ldots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

Aufgabe 18.21. (6 Punkte)

Man beweise das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren*. Das besagt, dass man in einem euklidischen Vektorraum aus einer gegebenen Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ basteln kann derart, dass die erzeugten Unterräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle$$

übereinstimmen für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 18.22. (6 Punkte)

Formuliere und beweise den „orthonormalen Basisergänzungssatz“.

Aufgabe 18.23. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jeden Vektor v mit $|| v ||= 1$ ist auch $|| \varphi(v) ||= 1$.
(3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis.
(4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis ist.

Aufgabe 18.24. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

19. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge X sind offen.
(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Aufgabe 19.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen sind.

Aufgabe 19.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 19.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in X die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

Aufgabe 19.5. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 19.6. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 19.7. Zeige, dass auf jeder Menge X die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 19.8. Sei X eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von X sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.9. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\mid z \mid < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 19.10. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\mid z \mid > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

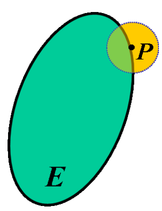
Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von T, wenn für jedes $\epsilon > 0$ der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus T als auch Punkte aus $X \setminus T$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von T heißt *Rand* von T, geschrieben $\operatorname{Rand}(T)$.



Aufgabe 19.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.13. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \operatorname{Rand}(T)$$

offen ist.

Aufgabe 19.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T genau dann leer ist, wenn T sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.15. Zeige, dass die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.16. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.17. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.18. (2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.19. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $T \subseteq Y$ genau dann offen in Y ist, wenn es eine in X offene Menge U gibt mit $T = Y \cap U$.

Aufgabe 19.20. (3 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Folge in einem metrischen Raum genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 19.21. (4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 19.22. (3 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\operatorname{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

Aufgabe 19.23. (4 Punkte)

Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 19.24. (4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge abgeschlossen ist.

Aufgabe 19.25. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.

Aufgabe 19.26. (6 Punkte)

Man gebe eine Folge reeller Zahlen derart an, dass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

20. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto m,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.2. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$X \longrightarrow X,\ x \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq X$ stetig ist.

Aufgabe 20.4. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L mit einem Häufungspunkt $x \in L$. Zeige, dass $f(x)$ ein Häufungspunkt der Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 20.5. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $P \in L$. Es sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass f genau dann in P stetig ist, wenn die eingeschränkte Abbildung

$$\tilde{f} : U(P, \epsilon) \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

in P stetig ist.

Aufgabe 20.6. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

Aufgabe 20.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ gilt für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x.

Aufgabe 20.8. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.9. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 20.10. Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 20.11. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

Aufgabe 20.12. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f : Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.13. (4 Punkte)

Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 20.14. (5 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 20.16. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ derart, dass die beiden Komponentenfolgen $(z_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils mindestens einen Häufungspunkt besitzen, die Folge selbst aber nicht.

Aufgabe 20.17. (4 Punkte)
Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto ||v||,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 20.18. (5 Punkte)
Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 20.19. (3 Punkte)
Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht stetig ist, deren Graph aber abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

21. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 21.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f : [a, b] \longrightarrow X$$

und

$$g : [b, c] \longrightarrow X$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h : [a, c] \longrightarrow X$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 21.3. Betrachte die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{falls } x\geq 0\,,\\ 0 & \text{sonst}\,.\end{cases}$$

Zeige mit jeder der Charakterisierungen aus Satz 20.3, dass diese Funktion nicht stetig ist.

Aufgabe 21.4. Zeige, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{falls } x\in \mathbb{Q}\,,\\ 0 & \text{sonst}\,,\end{cases}$$

in keinem Punkt $x\in\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\, x\longmapsto|\,x\,|,$$

stetig ist.

Aufgabe 21.6. Es sei

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 21.7. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 21.8. Es sei I ein nichtleeres reelles Intervall und $x\in I$ ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von $I\setminus\{x\}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 21.9. Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $X=A\cup B$ mit nichtleeren Teilmengen $A,B\subseteq X$ und $A\cap B=\emptyset$. Es gebe ein $\delta>0$ mit

$$d(x,y)\geq\delta \text{ für alle } x\in A,\, y\in B\,.$$

Zeige, dass A (und auch B) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Ein nichtleerer metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x,y\in X$ eine stetige Abbildung

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow X$$

gibt mit $\gamma(a)=x$ und $\gamma(b)=y$.

Aufgabe 21.10. Zeige, dass ein wegzusammenhängender metrischer Raum zusammenhängend ist.

Aufgabe 21.11. Zeige, dass der $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 21.12. Sei $n \geq 2$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 21.13. Sei T eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass T wegzusammenhängend ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.14. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 21.15. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 21.17. (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die folgende Relation auf X: Es ist $x \sim y$, falls es eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 21.18. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a, b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 21.19. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$n \mapsto x_n = (1 + \frac{1}{2n})^n \, .$$

Aufgabe 21.20. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 3 cm und die Ecklöcher seien ein Kreis mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

a) (63.5, 63.5)

b) (100, 100)

c) (63.5, 192,5)

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Welche Winkeltoleranz liegt in a) bis d) vor, wenn man die anliegenden Banden mitberücksichtigt?

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 21.21. (5 Punkte)

Fertige in der Situation der Aufgabe 21.20 eine hochladbare Grafik an, die auf dem Billardtisch die Linien von gleichem Schwierigkeitsgrad (also gleicher Winkeltoleranz zum Einlochen) zeigt.

22. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Zeige, dass T genau dann kompakt und zusammenhängend ist, wenn T ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

Aufgabe 22.2. Es sei
$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1[$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 22.3. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, & \text{falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$
stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 22.5. Es sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$
eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 22.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion
$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$
derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Aufgabe 22.7. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Die nächsten Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$|| \varphi || := \sup \left(|| \varphi(v) ||, || v || = 1 \right)$$

die *Norm* von φ.

Aufgabe 22.8. Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

Aufgabe 22.9. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $|| v || = 1$, gibt mit

$$|| \varphi(v) || = || \varphi || \ .$$

Aufgabe 22.10. Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Es ist $|| \varphi(v) || \leq || \varphi || \cdot || v ||$.
(2) Es ist $|| \varphi || = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ ist.
(3) Es ist $|| c\varphi || = |c| \cdot || \varphi ||$.
(4) Es ist $|| \varphi_1 + \varphi_2 || \leq || \varphi_1 || + || \varphi_2 ||$.

Aufgabe 22.11. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass die Abschätzung

$$|\lambda| \leq ||\varphi||$$

gilt.

Aufgabe 22.12. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 22.13. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild einer offenen Menge nicht offen sein muss.

Aufgabe 22.14. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild einer abgeschlossenen Menge nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 22.15. Sei X eine nichtleere Menge versehen mit der diskreten Metrik. Zeige, dass eine stetige Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

konstant ist.

Aufgabe 22.16. Skizziere die folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2 + 1)$,
(4) $x/(x^2 + 1)$,
(5) $x^2/(x^2 + 1)$,
(6) $x^3/(x^2 + 1)$,
(7) $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.17. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von φ exisitiert. Zeige, dass

$$|| \varphi || = \max \left(| \lambda |, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi \right)$$

gilt.

Aufgabe 22.18. (3 Punkte)

Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei der $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen sei. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Norm von φ.

Aufgabe 22.19. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \, v \longmapsto | \varphi(v) |,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von φ.

Aufgabe 22.20. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 22.21. (4 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befindet sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 22.22. (6 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf_{y \in T} d(x, y)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 22.23. (6 Punkte)

Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen, der Summen- oder der Maximumsmetrik versehen. Bestimme, abhängig von der gewählten Metrik, die maximale Anzahl von Punkten $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ derart, dass die Metrik auf der Teilmenge $T = \{P_1, \ldots, P_n\}$ die diskrete Metrik induziert.

23. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Zeige die Gleichheit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 23.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$\overline{T} = T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

ist.

Aufgabe 23.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$\overline{T} = \bigcap_{T \subseteq A,\, A \text{ abgeschlossen}} A$$

ist.

Aufgabe 23.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei T zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 23.5. Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührpunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 23.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f : T \to \mathbb{K}$ und $g : T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) .$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) .$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

Aufgabe 23.7. Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 23.8. Man gebe ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

derart, dass keine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

existiert.

Aufgabe 23.9. Sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die durch

$$b^{1/k}$$

definierte Folge gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 23.10. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 23.11. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(2) Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q\cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.

Aufgabe 23.12. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 23.13. Es sei $b > 0$, $b \neq 1$. Definiere die *reellen Logarithmen* zur Basis b als Umkehrfunktionen zu den reellen Exponentialfunktionen und formuliere deren wichtigste Eigenschaften.

Aufgabe 23.14. Definiere für eine Folge in einem metrischen Raum den Begriff *Cauchy-Folge*. Was ist ein *vollständiger metrischer Raum*?

Aufgabe 23.15. Sei

$$T = \{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$$

mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik, sei M ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x \in M$. Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen x konvergiert, wenn die Abbildung

$$T \longrightarrow M,\, \frac{1}{n} \longmapsto x_n,\, 0 \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.16. (2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und sei $a \in T$ ein Punkt, der ein Berührpunkt von $T \setminus \{a\}$ ist. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\in T\setminus\{a\},\, x\to a} f(x)$$

existiert.

Aufgabe 23.17. (4 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 23.18. (3 Punkte)
Zeige, dass ein euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig ist.

Aufgabe 23.19. (5 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x \leq 0\,, \\ 0\,, \text{ falls } y \leq 0\,, \\ y/x\,, \text{ falls } x \geq y > 0\,, \\ x/y\,, \text{ falls } y > x > 0\,, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von f auf jeder zur x-Achse oder zur y-Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber f selbst nicht stetig ist.

Aufgabe 23.20. (5 Punkte)
Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.

Aufgabe 23.21. (5 Punkte)
Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und additiv, d.h. es gelte $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ dann $\mathbb{R}$-linear ist.

24. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen komplexer Zahlen.

Aufgabe 24.2. Zeige, dass bei einer Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 24.3. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = \lambda a_k$ konvergent mit der Summe λs.

Aufgabe 24.4. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 24.5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert mit der Summe 1.

Aufgabe 24.6. Sei z eine komplexe Zahl, $z \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Aufgabe 24.7. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeerausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 24.8. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen?

Aufgabe 24.9. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wieviel Bier trinken sie insgesamt?

Aufgabe 24.10. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 24.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $x \in X$ konvergiere. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in X, wobei die folgende Eigenschaft gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k, m \geq N$ die Beziehung

$$d(x_k, y_m) \leq \epsilon$$

gilt. Zeige, dass auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe 24.12. Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Teilfamilie a_i , $i \in J$, summierbar ist.

Aufgabe 24.13. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Betragsfamilie $| a_i |$, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass a_i , $i \in I$, summierbar ist.

Aufgabe 24.14. Man bastle einen *Rechenschieber*, der die Multiplikation von positiven reellen Zahlen ausführt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.15. (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k .$$

Aufgabe 24.16. (3 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe [49]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i .$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

Aufgabe 24.17. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

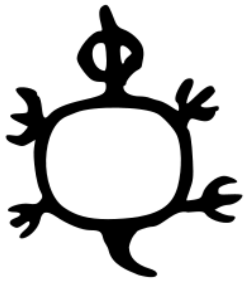
konvergiert.

Aufgabe 24.18. (4 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1

[49] Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.

ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.



Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkten Überholungsdaten.

Aufgabe 24.19. (4 Punkte)

Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie

$$\mid a_E \mid = \mid \sum_{i \in E} a_i \mid, E \subseteq I,\ E \text{ endlich}\,,$$

nach oben beschränkt ist.

Die letzte Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Aufgabe 24.20. (6 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow T$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Zeige, dass für jedes $x_0 \in T$ die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := f(x_n)$$

gegen ein (von der Folge unabhängiges) $x \in T$ konvergiert, und dass dieses x ein Fixpunkt von f ist.

25. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 25.2. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 25.3. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 25.4. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zeige, dass die Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

summierbar ist.

Aufgabe 25.5. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Berechne zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

die Teilsummen

$$s_k = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{z^k z^\ell}$$

zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und berechne $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k$.

Aufgabe 25.6. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zu $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$I_j = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 |\, k - \ell = j\}\,.$$

Berechne zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

die Teilsummen

$$t_j = \sum_{(k,\ell)\in I_j} \frac{1}{z^k z^\ell}$$

und berechne $\sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j$.

Aufgabe 25.7. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 25.8. Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 25.9. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|\, z \,| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} .$$

Aufgabe 25.10. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgabe 25.11. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)^3 .$$

Aufgabe 25.12. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Wertemenge ist.[50]

[50] Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 25.13. Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgaben zum Abgeben

Die nächste Aufgabe befasst sich mit der *g-adischen Entwicklung* von reellen Zahlen, vergleiche Aufgabe 24.16.

Aufgabe 25.14. (6 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Es sei eine Ziffernfolge

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\, i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben und es sei

$$r = \sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i$$

die durch diese Ziffernfolge definierte reelle Zahl. Zeige, dass die Ziffernfolge genau dann ab einer gewissen Stelle *periodisch* ist, wenn r eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 25.15. (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus allen Zahlen besteht, in deren Dezimalentwicklung keine 9 vorkommt. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

summierbar ist.

Aufgabe 25.16. (4 Punkte)

Sei a_k , $k \in \mathbb{N}$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 25.17. (4 Punkte)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

Aufgabe 25.18. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^4 .$$

Aufgabe 25.19. (8 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{a^2+b^2},\ a, b \in \mathbb{N}_+ ,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.20. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $\mid z \mid \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$\mid R_{N+1}(z) \mid \leq \frac{2}{(N+1)!} \mid z \mid^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 25.21. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten 4 Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

Aufgabe 25.22. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[51]

[51]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

26. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $x \in X$ konvergiert. Es sei T eine Menge und es seien

$$f_n : T \longrightarrow X,\ t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu x_n gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f : T \longrightarrow X,\ t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

Aufgabe 26.2. Es sei T eine endliche Menge und

$$f_n : T \longrightarrow X$$

eine Funktionenfolge in einen metrischen Raum X. Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.3. Sei T eine Menge und seien

$$f_n : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n : T \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 26.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten auf einem reellen Intervall $[a,b]$ die Funktionenfolge

$$f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

Aufgabe 26.5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge punktweise, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion.

Aufgabe 26.6. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x),$$

die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ nx \text{ für } 0 < x \leq 1/n, \\ 2 - nx \text{ für } 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & \text{für } x > 2/n\,. \end{cases}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionen stetig sind, und dass diese Funktionenfolge punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 26.7. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} |\ \| f \|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe 26.8. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die zugehörige Potenzreihe. Zeige, dass deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius der um $a \in \mathbb{C}$ „verschobenen“ Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

übereinstimmt.

Aufgabe 26.9. Zeige, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.10. Sei $b > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$b^x = \exp(x \cdot \ln b)\,.$$

Aufgabe 26.11. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.12. (4 Punkte)

Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n}.$$

Zeige, dass diese Folge für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ punktweise konvergiert, und untersuche die Folge auf gleichmäßige Konvergenz für die verschiedenen Definitionsmengen

$$I = \mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{R}_+,\ [1, \infty],\ [\frac{1}{5}, 5],\ ]0, 1],\ [0, 1]\,.$$

Aufgabe 26.13. (4 Punkte)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Zeige, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt, und dass die Reihe noch für alle $x \in \mathbb{C}$, $|\, x \,| = 1$, konvergiert.

Aufgabe 26.14. (6 Punkte)

Sei (Y, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ und

$$g_n : \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf T eingeschränkte Folge $f_n = g_n|_T$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.15. (4 Punkte)

Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} |\ ||\, f \,||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $||\, f \,|| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $||\, f \,|| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt
$$||\, \lambda f \,|| = |\, \lambda \,| \cdot ||\, f \,||\ .$$
(4) Für $g, f \in M$ gilt
$$||\, g + f \,|| \leq ||\, g \,|| + ||\, f \,||\ .$$

Aufgabe 26.16. (5 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe, die für ein $\epsilon > 0$ auf $U(0, \epsilon)$ konvergiere und dort die Nullfunktion darstellt. Zeige, dass dann $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (d.h. die Potenzreihe ist die Nullreihe).

Aufgabe 26.17. (3 Punkte)

Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_6$ der Exponentialreihe im Entwicklungspunkt 1.

27. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 27.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 27.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 27.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^q,$$

für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 27.5. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |\, x \,|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 27.6. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 27.7. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 27.8. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 27.9. Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 27.10. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ genau dann den Grad d besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d{+}1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Bei der „linearen Approximation“ von differenzierbaren Abbildungen kommen sogenannte affin-lineare Abbildungen vor.

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\alpha : V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \alpha(v) = \varphi(v) + w,$$

wobei φ eine lineare Abbildung und $w \in W$ ein Vektor ist, heißt *affin-linear*.

Aufgabe 27.11. Es sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum. Zeige, dass es zu zwei Vektoren $u, v \in W$ genau eine affin-lineare Abbildung

$$\alpha : K \longrightarrow W$$

gibt mit $\alpha(0) = u$ und $\alpha(1) = v$.

Aufgabe 27.12. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\alpha(0) = (2, 3, 4)$ und $\alpha(1) = (5, -2, -1)$.

Aufgabe 27.13. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.14. (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ eine konvergente Folge

$$(c_{in})_{n \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ gegeben, deren Limes mit c_i bezeichnet sei. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen vom Grad $\leq d$, die durch

$$f_n := c_{dn}x^d + c_{d-1\,n}x^{d-1} + \ldots + c_{2n}x^2 + c_{1n}x + c_{0n}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionenfolge auf jeder kompakten Kreisscheibe $B(0, r)$ gleichmäßig gegen

$$f = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

konvergiert.

Aufgabe 27.15. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 27.16. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \overline{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

Aufgabe 27.17. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, und

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n\,.$$

Aufgabe 27.18. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X - a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 27.19. (4 Punkte)
Es sei

$$F : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung gibt mit $F^{(n)} = 0$.

28. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|\,x\,|,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 28.2. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 28.3. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 28.4. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3, 3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d - 1$ Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Abschnitte unterteilen lassen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 28.6. Beweise Satz 28.7.

Aufgabe 28.7. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

mittels Polynomdivision (vgl. Beispiel 28.9).

Aufgabe 28.8. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x^2+x}$$

im Punkt $a=-1$.

Aufgabe 28.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} | \, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I,\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I,\mathbb{R}),\ f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.10. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f : [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 3x^3-7x^2+6x-3.$$

Aufgabe 28.11. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 28.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 28.13. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 28.14. (4 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 28.15. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt $a = 1$.

29. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 29.2. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 29.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 \cdot \exp(z^3 - 4z).$$

Aufgabe 29.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 29.5. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 29.6. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f_n'(x)$?

Aufgabe 29.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 29.8. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 29.9. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^i.

Aufgabe 29.10. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 29.1.

Aufgabe 29.11. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 25.11 (4).

Aufgabe 29.12. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin(\cos z).$$

Aufgabe 29.13. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 29.14. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)^n.$$

Aufgabe 29.15. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

Aufgabe 29.16. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgrund von Korollar 29.10 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\; x \longmapsto \arcsin x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],\; x \longmapsto \arccos x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

Aufgabe 29.17. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

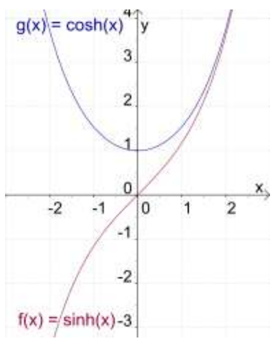
$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Aufgabe 29.18. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh z + \sinh z = e^z$$
(2)
$$\cosh z - \sinh z = e^{-z}$$
(3)
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1\,.$$
(4)
$$\cosh iz = \cos z \ \text{ und } \ \sinh iz = i \cdot \sin z\ .$$

Aufgabe 29.19. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.20. (4 Punkte)

Es sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

Aufgabe 29.21. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion
$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x.$$

Aufgabe 29.22. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}_+$ und
$$f : B(P, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung
$$\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
von f gibt.

Aufgabe 29.23. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \ \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$
stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 29.24. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

Aufgabe 29.25. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 29.26. (7 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

30. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Auch weiterhin viel Spaß im Mathematik-Studium!

Aufgabe 30.1. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 30.2. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 30.3. Es sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$
eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften
$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$
Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.4. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z \cos z\,,$$
im Nullpunkt.

Aufgabe 30.5. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$
im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 30.6. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 30.7. Es sei $p \in \mathbb{R}[U]$ ein Polynom und
$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}.$$
Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form
$$g'(x) = q(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$
mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 30.8. Wir betrachten die Funktion
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$
Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft
$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$
besitzt.

Aufgabe 30.9. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgaben zum Abgeben

Die folgende Aufgabe setzt Aufgabe 28.9 voraus.

Aufgabe 30.10. (4 Punkte)

Es sei

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \; f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 30.11. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zum Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto \sin(\cos z) + z^3 \exp(z^2).$$

Aufgabe 30.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \sin x \cos x \,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 30.13. (6 Punkte)

Sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0 \,, \\ 1 \text{ für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon \,, \\ 0 \text{ für } x \geq 1 \,. \end{cases}$$

Aufgabe 30.14. (3 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 30.15. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Testklausur 1

Aufgabe 1.1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* von einer Teilmenge unter einer Abbildung.
(2) Die *Peano-Axiome*.
(3) Eine *konvergente* Folge in einem angeordneten Körper.
(4) Der *Betrag* einer komplexen Zahl.
(5) Der *Rang* einer linearen Abbildung.
(6) Die *Determinante* (rekursive Definition) einer $n \times n$-Matrix.

Aufgabe 1.2. (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Aufgabe 1.4. (14 (=3+2+1+8) Punkte)

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') gibt mit $b' > 0$.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 1.5. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 1.6. (5 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Aufgabe 1.7. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 1.8. (8 (=6+2) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgabe 1.9. (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn kern $\varphi = 0$ ist.

Aufgabe 1.11. (3=(2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 1.13. (4 (=2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 + 72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 1.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F : \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Testklausur 1 mit Lösungen

Aufgabe 1.1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* von einer Teilmenge unter einer Abbildung.
(2) Die *Peano-Axiome*.
(3) Eine *konvergente* Folge in einem angeordneten Körper.
(4) Der *Betrag* einer komplexen Zahl.
(5) Der *Rang* einer linearen Abbildung.
(6) Die *Determinante* (rekursive Definition) einer $n \times n$-Matrix.

Lösung

(1) Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L |\, F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T unter F*.

(2) Eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $0 \in N$ (die *Null*) und einer (Nachfolger-)Abbildung

$$' : N \longrightarrow N,\ n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Peanomodell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Peano-Axiome* erfüllt sind.

(a) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).

(b) Jedes $n \in N$ ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).

(c) Für jede Teilmenge $T \subseteq N$ gilt: wenn die beiden Eigenschaften

- $0 \in T$,
- mit jedem Element $n \in T$ ist auch $n' \in T$,

gelten, so ist $T = N$.

(3) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper. Die Folge heißt *konvergent*, wenn es ein $x \in K$ gibt derart, dass folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(4) Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

ist der *Betrag* definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

(5) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim(\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

(6) Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe 1.2. (2 Punkte)
Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Lösung

Seien $x_1, x_2 \in L$ gegeben mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ ist. Es ist

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Da nach Voraussetzung $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, wie gewünscht.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Lösung

Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F : M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M \mid x \notin F(x)\}.$$

Da dies eine Teilmenge von M ist, muss es wegen der Surjektivität ein $y \in M$ geben mit

$$F(y) = T.$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich $y \in F(y)$ oder $y \notin F(y)$. Im ersten Fall ist also $y \in T$, und damit, nach der Definition von T, auch $y \notin F(y)$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von T, $y \in T$, ebenfalls ein Widerspruch.

Aufgabe 1.4. (14 (=3+2+1+8) Punkte)

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist} .$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') gibt mit $b' > 0$.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M, \; z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lösung

a) Wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist $ab = ba$, woraus die Reflexivität folgt. Zur Symmetrie sei $(a, b) \sim (c, d)$, also $ad = bc$. Dann ist auch $cb = da$, was $(c, d) \sim (a, b)$ bedeutet. Zur Transitivität sei

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ und } (c, d) \sim (e, f) ,$$

also

$$ad = bc \text{ und } cf = de .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$adf = bcf = bde.$$

Da $d \neq 0$ ist, folgt daraus $af = be$, was $(a, b) \sim (e, f)$ bedeutet.

b) Es sei (a, b) vorgegeben. Wegen $b \neq 0$ ist $b > 0$ oder $b < 0$. Bei $b > 0$ sind wir fertig, da (a, b) zu sich selbst äquivalent ist. Bei $b < 0$ betrachten wir $(-a, -b)$. Der zweite Eintrag ist positiv, und wegen

$$a(-b) = -(ab) = b(-a)$$

sind (a, b) und $(-a, -b)$ äquivalent zueinander.

c) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ vorgegeben und $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Das bedeutet $[(z_1, 1)] = [(z_2, 1)]$ bzw. $(z_1, 1) \sim (z_2, 1)$, also

$$z_1 = z_1 1 = 1 z_2 = z_2.$$

d) Wir setzen

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+cb, bd)] .$$

Wegen $b, d \neq 0$ ist auch $bd \neq 0$. Zur Wohldefiniertheit dieser Verknüpfung sei

$$(a,b) \sim (a',b') \text{ und } (c,d) \sim (c',d') ,$$

also

$$ab' = a'b \text{ und } cd' = c'd .$$

Wir behaupten

$$(ad+cb, bd) \sim (a'd'+c'b', b'd') .$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
(ad+cb)b'd' &= adb'd' + cbb'd' \\
&= ab'dd' + cd'bb' \\
&= a'bdd' + c'dbb' \\
&= bda'd' + bdc'b' \\
&= bd(a'd' + c'b').
\end{aligned}$$

Die Assoziativität folgt aus

$$\begin{aligned}
([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] &= [(ad+bc, bd)] + [(e,f)] \\
&= [(ad+bc)f + bde, bdf] \\
&= [adf + bcf + bde, bdf] \\
&= [adf + b(cf+de), bdf] \\
&= [(a,b)] + ([(cf+de, df)]) \\
&= [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]).
\end{aligned}$$

Wegen

$$[(a,b)] + [(0,1)] \;=\; [(a1 + b0, b1)] \;=\; [(a,b)]$$

(und ebenso in der anderen Reihenfolge) ist $(0,1)$ das neutrale Element.

Wir behaupten, dass zu $[(a,b)]$ das inverse Element durch $[(-a,b)]$ gegeben ist. Dies folgt aus

$$[(a,b)] + [(-a,b)] \;=\; [(ab + b(-a), b^2)] \;=\; [(ab - ab, b^2)] \;=\; [(0, b^2)] \;=\; [(0,1)],$$

wobei die letzte Gleichung sich aus $0 \cdot 1 = 0 \cdot b^2$ ergibt.

Schließlich ist für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(z_1 + z_2) \;=\; [(z_1 + z_2, 1)] \;=\; [(z_1 \cdot 1 + 1 \cdot z_2, 1 \cdot 1)] \;=\; [(z_1, 1)] + [(z_2, 1)] \;=\; \varphi(z_1) + \varphi(z_2).$$

Aufgabe 1.5. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Lösung

Wir rechnen die beiden Seiten aus, die zu zeigende Abschätzung bedeutet dann

$$2x^2 + 2x + 1 \geq x^2 + 4x + 4\,.$$

In einem angeordneten Körper erhalten sich bei beidseitiger Addition die Abschätzungen, so dass die Abschätzung äquivalent zu

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

ist. Wir schreiben die linke Seite als

$$x^2 - 2x - 3 \;=\; x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \;=\; (x-1)^2 - 4.$$

Bei $x \geq 3$ ist $x - 1 \geq 2$ und daher

$$(x-1)^2 \;\geq\; 2(x-1) \;\geq\; 2^2 \;=\; 4,$$

also gilt für $x \geq 3$ die Abschätzung $(x-1)^2 - 4 \geq 0$ und damit die ursprüngliche Abschätzung.

Aufgabe 1.6. (5 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Lösung

Induktionsanfang für $n = 10$. Es ist $3^{10} = 9^5 = 81 \cdot 81 \cdot 9 \geq 6000 \cdot 9 \geq 10000 = n^4$. Zum Induktionsschluss sei $n \geq 10$. Dann ist

$$3^{n+1} \;=\; 3 \cdot 3^n \;\geq\; 3 \cdot n^4 \;=\; n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4.$$

Andererseits ist nach der binomischen Formel

$$(n+1)^4 \;=\; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Wir müssen

$$n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 \;\geq\; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

nachweisen. Der erste Summand stimmt links und rechts überein, für die anderen Summanden zeigen wir, dass die linken, also jeweils $\frac{1}{2}n^4$, mindestens so groß wie die rechten sind. Dies folgt aber direkt aus $n^4 \geq 8n^3$ (da $n \geq 10$), aus $n^4 \geq 12n^2$, da ja $n^2 \geq 12$ ist, aus $n^4 \geq 8n$ und aus $n^4 \geq 2$.

Aufgabe 1.7. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) schreiben als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}} .$$

Folgen von Typ a/n, a/n^2 und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe 1.8. (8 (=6+2) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Lösung

a) Wir müssen zeigen, dass U nicht leer ist und bzgl. der Addition und der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Die konstante Nullfolge, also das Nullelement von V, ist offenbar eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Seien $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ zwei Folgen aus U, also zwei Nullfolgen. Wir müssen zeigen, dass auch die Summe $x + y$ gegen null konvergiert. Sei dazu

$\epsilon > 0$ vorgegeben. Für $\epsilon/2$ gibt es, da die beiden Folgen gegen 0 konvergieren, natürliche Zahlen n_0 und m_0 mit

$$|x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq n_0$$

und

$$|y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq m_0 .$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung für den Betrag gilt daher für $n \geq \max(n_0, m_0)$ die Abschätzung

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

also liegt eine Nullfolge vor. Zum Nachweis der Abgeschlossenheit unter der skalaren Multiplikation sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ konvergent und $s \in K$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass die Folge $sx_n, n \in \mathbb{N}_+$, gegen 0 konvergiert. Bei $s = 0$ ist dies die Nullfolge, sei also $s \neq 0$. Wegen

$$|sx_n| = |-sx_n|$$

können wir annehmen, dass s positiv ist. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist ϵ/s ebenfalls positiv und aufgrund der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gegen 0 gibt es ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n| \leq \epsilon/s$$

gilt. Für $n \geq n_0$ gilt daher wegen der Multiplikativität des Betrags

$$|sx_n| = s\,|x_n| \leq s\epsilon/s = \epsilon,$$

so dass auch diese Folge gegen 0 konvergiert.

b) Die beiden Folgen sind linear unabhängig. Sie sind beide nicht die konstante Nullfolge. Sie wären also nur dann linear abhängig, wenn die eine Folge ein skalares Vielfaches der anderen wäre. Nehmen wir also an, dass für ein $s \in K$ die Beziehung

$$\frac{1}{n} = s\frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt. Für $n = 1, 2$ bedeutet dies insbesondere

$$1 = s1 \text{ und } \frac{1}{2} = s\frac{1}{4} .$$

Dies bedeutet $s = 1$ und $s = 2$, was nicht zugleich erfüllt sein kann.

Aufgabe 1.9. (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix} .$$

Lösung

Man multipliziert die erste Zeile mit der Spalte rechts und erhält

$(2-i)(1+i)+(-1-3i)(1-i)-(2+5i) \;=\; 2+2i-i+1-1+i-3i-3-2-5i \;=\; -3-6i.$

Die zweite Zeile multipliziert mit der Spalte rechts ergibt

$$i(1+i)+(4-2i)(2+5i) \;=\; i-1+8+20i-4i+10 \;=\; 17+17i.$$

Das Ergebnis ist also der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} -3-6i \\ 17+17i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn kern $\varphi = 0$ ist.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt kern $\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) \;=\; \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \;=\; 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in$ kern φ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe 1.11. (3=(2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Lösung

a) Es sei $v \in V$ beliebig. Da ein Erzeugendensystem vorliegt, gibt es eine Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Da eine lineare Abbildung Linearkombinationen erhält, muss für eine lineare Abbildung φ mit $\varphi(v_i) = w_i$ gelten

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.$$

Es gibt also für $\varphi(v)$ nur diese eine Möglichkeit und daher gibt es maximal ein φ.

b) Sei $V = W = K$ und sei $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 1$. Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind ein Erzeugendensystem von K, da dies für v_1 allein schon gilt. Es gibt aber keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_2) = \varphi(0) = 1$, da eine lineare Abbildung 0 auf 0 schickt.

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 3x - 2y + 7z - w &= 0 \\ 2x - y - 4z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Zeile die Variable y. Das resultierende System ist ($II' = II + 2I$, $III' = III + I$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 7x + 17z + 3w &= 0 \\ 4x + z + 5w &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus II' mittels III' die Variable z, das ergibt $(II' - 17III')$

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + 5z + 2w &=& 0 \\ 4x \quad + z + 5w &=& 0 \\ -61x \qquad - 82w &=& 0\,. \end{array}$$

Wir können jetzt dieses System lösen, wobei $x \neq 0$ die anderen Variablen eindeutig festlegt. Sei $x = 82$. Dann ist $w = -61$. Damit ist

$$z = -4x - 5w = -4 \cdot 82 - 5(-61) = -328 + 305 = -23.$$

Schließlich ist

$$y = -2x - 5z - 2w = -2(82) - 5(-23) - 2(-61) = -164 + 115 + 122 = 73\,.$$

Die Lösungsmenge, also der Kern, ist somit

$$\{s \begin{pmatrix} 82 \\ 73 \\ -23 \\ -61 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe 1.13. (4 (=2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Lösung

a) Wir berechnen die Determinante der Matrix. Diese ist

$$\begin{array}{rcl} \det M &=& (2+5i)(6-2i) - (3-4i)(1-2i) \\ &=& 12 + 10 + 30i - 4i - (3 - 8 - 4i - 6i) \\ &=& 27 + 36i. \end{array}$$

Insbesondere ist die Matrix invertierbar.

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \det M \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher können wir direkt eine Lösung angeben, nämlich

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6-2i \\ -(3-4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-4i \\ -6+8i \end{pmatrix} .$$

Es ist ja

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(6-2i) \\ 2(-3+4i) \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} (2+5i)(6-2i)+(1-2i)(-3+4i) \\ (3-4i)(6-2i)+(6-2i)(-3+4i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \det M \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 1.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Lösung

Der Produktraum besitzt die Dimension $n+m$. Um dies zu beweisen sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Wir behaupten, dass die Elemente

$$(v_j, 0),\ j \in \{1, \ldots, n\},\ \text{ und } (0, w_i),\ i \in \{1, \ldots, m\} ,$$

eine Basis von $V \times W$ bilden.

Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann gibt es Darstellungen

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \text{ und } w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i .$$

Daher ist

$$\begin{aligned} (v, w) &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, 0) + (0, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, 0) + \sum_{i=1}^{m} b_i (0, w_i), \end{aligned}$$

d.h., es liegt ein Erzeugendensystem vor.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit sei

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, 0) + \sum_{i=1}^{m} b_i (0, w_i) = 0 = (0, 0)$$

angenommen. Die gleiche Rechnung rückwärts ergibt

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) = (0,0)$$

und das bedeutet

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = 0\,.$$

Da es sich jeweils um Basen handelt, folgt $a_j = 0$ für alle j und $b_i = 0$ für alle i.

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V,W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F : \operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Lösung

Zur Additivität. Seien $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$. Dann ist (nach der Definition der Addition auf $\operatorname{Hom}_K(V,W)$)

$$F(\varphi + \psi) \;=\; (\varphi + \psi)(v) \;=\; \varphi(v) + \psi(v) \;=\; F(\varphi) + F(\psi).$$

Zur Skalarmultiplikation. Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ und $s \in K$. Dann ist (wieder aufgrund der Definition der Skalarmultiplikation auf $\operatorname{Hom}_K(V,W)$)

$$F(s\varphi) \;=\; (s\varphi)(v) \;=\; s\varphi(v) \;=\; sF(\varphi).$$

Testklausur 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *metrischer Raum*.
(2) Ein *zusammenhängender* metrischer Raum X.
(3) Ein *lokales Minimum* einer Funktion
$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}.$$
(4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi:X\longrightarrow Y$$
zwischen zwei metrischen Räumen X und Y in einem Punkt $x\in X$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$$
($n\in\mathbb{N}$) gegen eine Funktion $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$.
(6) Die *Exponentialreihe*.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$$
in einem Punkt $a\in\mathbb{K}$.
(8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$$
in einem Punkt $a\in K$.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Es seien $P=(\frac{3}{4},-1)$ und $Q=(2,\frac{1}{5})$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 2.3. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Aufgabe 2.4. (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Aufgabe 2.5. (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Aufgabe 2.6. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 2.7. (5 (1+4) Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 2.8. (5 (2+2+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|\, f(q)\,| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 2.9. (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.10. (1 Punkt)

Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\; z \longmapsto \exp\, z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

Aufgabe 2.11. (5 (3+2) Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt $x = 1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Aufgabe 2.13. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 2.14. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Aufgabe 2.15. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (Man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Testklausur 2 mit Lösungen

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *metrischer Raum*.
(2) Ein *zusammenhängender* metrischer Raum X.
(3) Ein *lokales Minimum* einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

zwischen zwei metrischen Räumen X und Y in einem Punkt $x \in X$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

($n \in \mathbb{N}$) gegen eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Exponentialreihe*.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

(8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in K$.

Lösung

(1) Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}\,,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt.
(a) $d\,(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(b) $d\,(x, y) = d(y, x)$,
(c) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(2) Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Minimum in $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in U(x, \epsilon)$ gilt $f(x') \geq f(x)$.

(4) Die Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

heißt stetig in $x \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\varphi\big(U(x, \delta)\big) \subseteq U\big(\varphi(x), \epsilon\big)$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Funktionenfolge gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$|\, f_n(x) - f(x)\,| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

(6) Die Exponentialreihe ist exp $z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(7) Man sagt, dass

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in \mathbb{K} \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

(8) Das Taylor-Polynom von f in a vom Grad n ist

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k\,.$$

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Es seien $P = (\frac{3}{4}, -1)$ und $Q = (2, \frac{1}{5})$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Lösung

Die Abstände der einzelnen Koordinanten sind

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$$

und

$$\frac{1}{5} - (-1) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}\,.$$

a) Der euklidische Abstand ist somit

$$\sqrt{(\frac{5}{4})^2 + (\frac{6}{5})^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{625+576}{400}} = \sqrt{\frac{1201}{400}} = \frac{\sqrt{1201}}{20}.$$

b) In der Summenmetrik ist der Abstand

$$\frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \frac{25+24}{20} = \frac{49}{20}.$$

c) Es ist

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{20} > \frac{24}{20} = \frac{6}{5},$$

daher ist der Abstand in der Maximumsmetrik gleich $\frac{5}{4}$.

Wir behaupten, dass der Maximumsabstand kleiner dem euklidischen Abstand und dass dieser kleiner dem Summenabstand ist. Um dies zu sehen bringt man die drei Zahlen auf den Hauptnenner 20 und muss dann für die Zähler

$$25 < \sqrt{1201} < 49$$

zeigen. Wegen $25^2 = 625 < 1201$ und $49^2 > 40^2 = 1600 > 1201$ ist das klar.

Aufgabe 2.3. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Lösung

Sei zunächst $x = 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann man $\delta = \epsilon$ setzen, denn aus $\mid u \mid \leq \epsilon$ folgt auch $\mid f(u) \mid \leq \epsilon$. Sei nun $x \neq 0$. Wir zeigen, dass man für $\epsilon = \mid \frac{x}{2} \mid > 0$ kein $\delta > 0$ mit der Abschätzungseigenschaft für die Stetigkeit finden kann. Sei hierzu $\delta > 0$ vorgegeben und sei $c = \min(\delta, \epsilon)$. Wenn x rational ist, so wählen wir eine irrationale Zahl $u \in]x - c, x + c[$, wenn x irrational ist, so wählen wir eine rationale Zahl $q \in]x - c, x + c[$. Im ersten Fall gilt

$$\mid f(x) - f(u) \mid = \mid x \mid > \epsilon,$$

im zweiten Fall gilt

$$\mid f(x) - f(q) \mid = \mid q \mid > \epsilon,$$

so dass in beiden Fällen die δ-Umgebung von x nicht in die ϵ-Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Aufgabe 2.4. (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Lösung

Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig und es ist $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$. Wenn der Zwischenwertsatz auch rational gelten würde, müsste es im rationalen Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle geben, also ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Dies kann es aber nicht geben, da die Quadratwurzel aus 2 irrational ist.

Aufgabe 2.5. (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Lösung

Die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 = [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_{k+1} > n_k$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x.

Aufgabe 2.6. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x + 3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x + 3 = 0$, also bei $x_0 = -\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv. Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x + 3)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-4x^2 - 6x + 2)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = 0$$

bzw.

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16}\,.$$

Also ist

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit

$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}\,.$$

Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \to -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \to +\infty$ fällt, aber positive bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe 2.7. (5 (1+4) Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Lösung

a) Nach der Produkt- und Kettenregel ist

$$h'(x) = (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x))\,.$$

b) Wir berechnen zuerst $h(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2+1)^2 \cdot ((x+2)^2-1) \\ &= (x^4+2x^2+1)(x^2+4x+3) \\ &= x^6+4x^5+5x^4+8x^3+7x^2+4x+3. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist daher

$$h'(x) = 6x^5+20x^4+20x^3+24x^2+14x+4\,.$$

Andererseits ist

$$f'(x) = 2x \text{ und } g'(x) = 1$$

und daher nach Teil a)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)) \\ &= (x^4+2x^2+1)2(x+2) + 2(x^2+1)(2x)(x^2+4x+3) \\ &= 2(x^5+2x^3+x+2x^4+4x^2+2) + 4x(x^4+4x^3+3x^2+x^2+4x+3) \\ &= 2(x^5+2x^4+2x^3+4x^2+x+2) + 4x(x^4+4x^3+4x^2+4x+3) \\ &= 6x^5+20x^4+20x^3+24x^2+14x+4. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8. (5 (2+2+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3+x-1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0,1]$ derart an, dass $|\,f(q)\,| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Lösung

a) Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$, daher besitzt die stetige Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes mindestens eine Nullstelle in $[0,1]$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2+1$ und dies ist in diesem Intervall positiv, so dass die Funktion f dort streng wachsend ist. Also kann sie nicht mehr als eine Nullstelle besitzen.

b) Für $x = 1/2 = 0,5$ ist

$$f(1/2) = 1/8+1/2-1 < 0\,,$$

die Nullstelle muss also in der rechten Intervallhälfte liegen. Für $x = 0,8$ ergibt sich

$$f(0,8) = (0,8)^3+0,8-1 = 0,512+0,8-1 = 0,312 > 0\,,$$

so dass dieser Wert zu groß ist. Für $x = 0,7$ ergibt sich

$$f(0,7) = (0,7)^3+0,7-1 = 0,343+0,7-1 = 0,043 > 0\,,$$

was immer noch zu groß ist. Für $x = 0,6$ ergibt sich

$$f(0,6) = (0,6)^3 + 0,6 - 1 = 0,216 + 0,6 - 1 = -0,184 < 0\,.$$

Die Nullstelle liegt also im offenen Intervall zwischen $0,6$ und $0,7$ und die erste Nachkommastelle ist 6.

c) Wie unter b) berechnet ist $f(0,7) = 0,043 < 0,1$, so dass man $q = 0,7$ nehmen kann.

Aufgabe 2.9. (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+h)^3 + 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 3 - (a^3 + 2a^2 - 5a + 3)}{h} \\
&= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 3 - a^3 - 2a^2 + 5a - 3}{h} \\
&= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 4ah + 2h^2 - 5h}{h} \\
&= 3a^2 + 3ah + h^2 + 4a + 2h - 5 \\
&= 3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist der Limes von diesem Ausdruck für h gegen 0, und dieser ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} (3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h) &= 3a^2 + 4a - 5 + \lim_{h \to 0} h(3a + h + 2) \\
&= 3a^2 + 4a - 5.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist also $3a^2 + 4a - 5$.

Aufgabe 2.10. (1 Punkt)

Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp\, z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

Lösung

Die komplexe Exponentialfunktion ist wegen $\exp 2\pi n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ nicht injektiv, daher gibt es überhaupt keine Umkehrfunktion.

Aufgabe 2.11. (5 (3+2) Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt $x = 1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Lösung

a) Durch Polynomdivision erhält man $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ und $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$. Daher ist

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \frac{x - 2}{x^2 + x - 1} \,.$$

Daher ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 + x - 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b) Nach Teil a) ist die Regel von l'Hospital anwendbar. Die Ableitungen sind $(x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$ und $(x^3 - 2x + 1)' = 3x^2 - 2$, die beide für $x = 1$ keine Nullstelle besitzen. Nach der Regel von l'Hospital ist daher

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 3}{3x^2 - 2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Lösung

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit den Koeffizienten n^n. Sie konvergiert für $z = 0$, da dann nur ein Glied von null verschieden ist. Wir behaupten, dass die Reihe für keine weitere komplexe Zahl konvergiert. Da es sich um eine Potenzreihe handelt, genügt es, für jede reelle positive Zahl z nachzuweisen, dass die Reihe divergiert. Zu $z > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kz \geq 1$. Es gilt dann auch $nz \geq 1$ für alle $n \geq k$. Wegen

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^n z^n \geq \sum_{n=k}^{\infty} 1$$

erfüllt die Reihe nicht das Cauchy-Kriterium und kann daher nicht konvergieren.

Aufgabe 2.13. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Lösung

Wir zeigen, dass diese Familie nicht summierbar ist. Es genügt zu zeigen, dass die endlichen Teilsummen der Familie unbeschränkt sind. Sei dazu $b > 0$ gegeben. Aufgrund des Archimedesprinzips gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \cdot \frac{1}{9} \geq b$. Zwischen 2 und 3 gibt es unendlich viele rationale Zahlen, so dass wir n verschiedene rationale Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ in diesem Intervall wählen können. Für die zugehörige endliche Teilsumme gilt dann

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i^2} \geq n \cdot \frac{1}{9} \geq b,$$

so dass b überschritten wird.

Aufgabe 2.14. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Lösung

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_+$ die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktionen sind nicht stetig, da der Limes für x gegen 0 stets $0 \neq \frac{1}{n}$ ist. Wir behaupten, dass diese Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, die als konstante Funktion stetig ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \epsilon$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$|\, f_n(x) - 0 \,| = |\, f_n(x) \,| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Aufgabe 2.15. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (Man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}\,.$$

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}\,.$$

Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}\,.$$

Die vierte Ableitung ist

$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4 \cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4 \cdot 4!}(x-2)^4$$

bzw.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 .$$

Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- CC-BY-SA-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis