Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 7

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von φ ein Normalteiler in H?

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element und sei

$$\varphi : G \longrightarrow G,\ h \longmapsto hg,$$

die Multiplikation mit g. Zeige, dass φ bijektiv ist und dass φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn $g = e_G$ ist.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung p. Zeige, dass G eine zyklische Gruppe ist.

Aufgabe 4. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern $N_i, i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z} \bmod 15$.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Es seien G und H Gruppen mit der Produktgruppe $G \times H$. Zeige, dass die Gruppe $G \times \{e_H\}$ ein Normalteiler in $G \times H$ ist und dass die Restklassengruppe $(G \times H)/G \times \{e_H\}$ kanonisch isomorph zu H ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und sei M eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi : G \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zeige, dass M eine Gruppe und dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von drei Untergruppen $F \subseteq G \subseteq H$ an derart, dass F ein Normalteiler in G und G ein Normalteiler in H, aber F kein Normalteiler in H ist.

Abbildungsverzeichnis