Dipl.-Math. A. Kaid **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Ferienblatt 1

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Zeige: Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Aufgabe 1.2. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die Bedingung $ad - bc \neq 0$ sowohl $cx + d \neq 0$ als auch die Irrationalität des Quotienten $\frac{ax+b}{cx+d}$ impliziert.

Aufgabe 1.3. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 1.4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$x_0 := x, x_1 := y, x_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \text{ für } n \geq 2,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 1.5. Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n := \sqrt[n]{n}$.

Aufgabe 1.6. Bestimme Maximum, Minimum,Supremum und Infimum der Menge $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, sofern diese existieren.

Aufgabe 1.7. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge wobei alle y_k nicht negativ sind. Zeige, dass die Folge $x_n := \sqrt[n]{y_1^n + y_2^n + \ldots + y_n^n}$ gegen das Supremum der Menge $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ konvergiert.

Aufgabe 1.8. Zeige mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die durch

$$x_1 := 1, x_{n+1} := \frac{2 + x_n}{1 + x_n}$$

rekursiv definierte Folge konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.9. (2 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass aus $ad - bc = 0$ entweder $cx + d = 0$ oder $\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$ folgt.

Aufgabe 1.10. (4 Punkte)

Zeige, dass für jede reelle Zahl $x > 0$ die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ erfüllt ist. Wann gilt die Gleichheit?

Aufgabe 1.11. (4 Punkte)

Sei $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeige, dass $(1 + y)^n \geq \frac{n^2 y^2}{4}$ gilt.

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Betrachte die durch $x_0 := 1, x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt? Konvergiert die Folge?

Aufgabe 1.13. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n := (1 - \frac{1}{n^2})^n$.

Aufgabe 1.14. (4 Punkte)

Konvergiert die Folge $x_n := \sqrt[n]{n!}$?

Aufgabe 1.15. (4 Punkte)

Es sei $c \in (0, 1)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige die folgende Aussage: Gilt ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $| x_{n+1} - x_n | \leq c | x_n - x_{n-1} |$ so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Ist die Aussage immernoch richtig, wenn man $c \in (0, 1)$ durch $c = 1$ ersetzt?

Aufgabe 1.16. (4 Punkte)

Sei $A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq (\operatorname{Re}(z))^2 + 1\} \subset \mathbb{C}$. Zeige die folgende Aussage: Sind $z_1, z_2 \in A$ und ist $\lambda \in [0,1]$, so ist auch $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in A$.

Aufgabe 1.17. Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x + y \quad - z \quad - w & = & 1 \\ 2x + 5y - 7z - 5w & = & -2 \\ 2x \quad - y + z + 3w & = & 4 \\ 5x + 2y - 4z + 2w & = & 6\,. \end{array}$$