Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 32

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\, dt}{b-a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b - a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser Durchschnittswert (oder Mittelwert) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 32.1. *Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a)\,.$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbeondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\, dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$. □

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Es ist geschickt auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\, dt := -\int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Definition 32.2. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral.*

Satz 32.3. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \mapsto 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h}\Big(\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)\Big)$$

für $h \mapsto 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $g(t) = f(t) - f(x)$ betrachten können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|\,f(t)\,| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ die Abschätzung

$$\Big|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,\Big| \leq \Big|\int_x^{x+h} |\,f(t)\,|\ dt\,\Big| \leq \Big|\int_x^{x+h} \epsilon\,dt\,\Big| = |\,h\,|\,\epsilon$$

und daher

$$\Big|\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,\Big| \leq \epsilon.$$

□

Stammfunktion

Zur Definition von Stammfunktionen setzen wir wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\ = \mathbb{C}$. Wir werden uns aber weitgehend auf den reellen Fall beschränken.

Definition 32.4. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in D$.

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 31.14 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 32.5. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 31.14 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. $\square$

Lemma 32.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

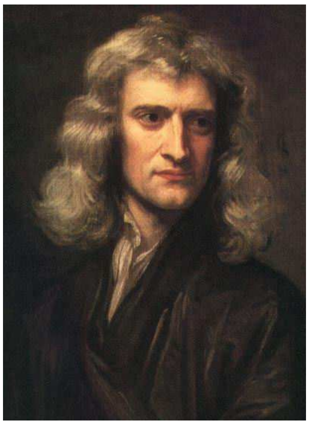
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G = c$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F - G)' \,=\, F' - G' \,=\, f - f \,=\, 0.$$

Daher ist nach Korollar 28.4 die Differenz $F - G$ konstant. $\square$



Isaac Newton (1643-1727)   Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel*.

KOROLLAR 32.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a < b$ aus I die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 31.14 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) \;=\; G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 32.3 ist G differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 32.6 ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) - G(a) \;=\; F(b) - c - F(a) + c \;=\; F(b) - F(a).$$

$\square$

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt = F + c\,,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere in Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt. Das explizite Aufführen einer Integrationskonstanten erübrigt sich, wenn man das Gleichheitszeichen so interpretiert, dass die Gleichheit eben nur bis auf eine Konstante gilt.

Notation 32.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den schon im ersten Semester bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1} x^{a+1}$.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$, es ist ja

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ ist $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, es ist ja

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x})' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}.
\end{aligned}$$

In der übernächsten Vorlesung werden wir eine Verfahren angeben, wie man zu einer beliebigen rationalen Funktion (also einem Quotienten aus zwei Polynomen) eine Stammfunktion finden kann.

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2}\, d \;=\; -\frac{1}{x}|_{-a}^{a} \;=\; -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \;=\; -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 32.9. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{1}{t} \text{ sin } \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{t^2}{2} \text{ cos } \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t \neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t \text{ cos } \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \text{ sin } \frac{1}{t^2}\;.$$

Für $t = 0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{s^2}{2} \text{ cos } \frac{1}{s^2}}{s} = \frac{s}{2} \text{ cos } \frac{1}{s^2}\;.$$

Für $s \mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 32.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) \;=\; 0 - 0 \;=\; 0.$$

Stammfunktionen zu Potenzreihen

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann, siehe Vorlesung 29.

Lemma 32.10. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine in $U(0,r)$ konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls in $U(0,r)$ konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für f dar.

Beweis. Sei $x \in U(0,r)$. Nach Voraussetzung und nach Lemma 26.7 ist dann auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n x^n \,|$$

konvergent. Für jedes $n \geq x$ gelten die Abschätzungen

$$|\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,| \leq |\, a_{n-1} x^{n-1} \,||\, \frac{x}{n} \,| \leq |\, a_{n-1} x^{n-1} \,| \; .$$

Daher gilt für ein $k \geq x$ die Abschätzung

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |\, a_{n-1} x^{n-1} \,| \; .$$

Die rechte Reihe konvergiert nach Voraussetzung und ist daher eine konvergente Majorante für die linke Reihe. Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,|$ und nach Satz 24.8 auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Die Stammfunktionseigenschaft folgt aus Satz 29.1. $\square$

Abbildungsverzeichnis