Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X,Y,Z,W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 10.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 10.3. Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n,\, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die Reduktion.

Sei R ein kommutativer Ring und n_R das Nilideal von R, das aus allen nilpotenten Elementen von R besteht. Dann nennt man den Restklassenring R/n_R die *Reduktion* von R.

Aufgabe 10.4. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 10.5. Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K-Algebra, die als K-Modul endlich sei. Zeige, dass ein Element $f \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es ein Nichtnullteiler ist.

AUFGABE 10.6. Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A, $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

AUFGABE 10.7. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann ist M genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von R-Untermoduln stationär wird.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des artinschen Moduls, der „dual" zum Begriff des noetherschen Moduls ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$

von R-Untermoduln stationär wird.

Ein kommutativer Ring R heißt *artinsch*, wenn er als R-Modul artinsch ist.

AUFGABE 10.8. Es sei A ein artinscher Integritätsbereich. Man zeige, dass A ein Körper ist. Man gebe ein Beispiel eines artinschen kommutativen Ringes, der kein Körper ist.

AUFGABE 10.9. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von Primidealen ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 10.10. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei I ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/I$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die I umfassen.

Zeige, dass das Gleiche für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale gilt.

AUFGABE 10.11. (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 10.12. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y]$. Finde eine K-Unteralgebra von A, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.

Aufgabe 10.14. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.

Aufgabe 10.15. (5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Man zeige, dass N genau dann artinsch ist, wenn M und P artinsch sind.

Aufgabe 10.16. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige: Wenn M artinsch und $\phi : M \to M$ R-linear und injektiv ist, so ist ϕ ein Isomorphismus. Formuliere und beweise auch eine analoge Aussage für den Fall, das M noethersch ist.