Algebraische Kurven - Vorlesung 3

Die Zariski-Topologie

In der vorstehenden Proposition haben wir gezeigt, dass die affin-algebraischen Teilmengen eines affinen Raumes die Axiome für abgeschlossene Mengen einer Topologie erfüllen. Diese Topologie nennt man die Zariski-Topologie.

Definition 1. In einem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n$ versteht man unter der *Zariski-Topologie* diejenige Topologie, bei der die affin-algebraischen Mengen als abgeschlossen erklärt werden. Die offenen Mengen der Zariski-Topologie sind also die Komplemente der affin-algebraischen Mengen.

Die Zariski-Topologie weicht sehr stark von anderen Topologien ab, insbesondere von solchen, die durch eine Metrik gegeben sind. Insbesondere ist die Zariski-Topologie nicht *Haussdorfsch*. Generell kann man sagen, dass die offenen Mengen (außer der leeren Menge) in der Zariski-Topologie sehr groß sind (siehe Aufgabe 3.8), während die abgeschlossenen (also die affin-algebraischen Mengen) sehr dünn sinn (außer dem ganzen Raum selbst).

Beispiel 2. Die Zariski-Topologie auf der affinen Geraden $\mathbb{A}_K^1$ lässt sich einfach beschreiben. Als (Zariski-)abgeschlossene Teilmenge haben wir zunächst einmal die gesamte affine Gerade, die durch $V(0)$ beschrieben wird. Alle anderen abgeschlossenen Teilmengen werden durch $V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \neq 0$ beschrieben. Da $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist, kann man sogar $\mathfrak{a} = (f)$, $f \neq 0$, ansetzen. Die zugehörige Nullstellenmenge besteht also aus endlich vielen Punkten. Andererseits ist jeder einzelne Punkt P mit der Koordinate a die einzige Nullstelle des linearen Polynoms $X - a$, also ist $\{P\} = V(X - a)$ Zariski-abgeschlossen. Eine endliche Ansammlung von Punkten $P_1, \ldots, P_k$ mit den Koordinaten $a_1, \ldots, a_k$ ist die Nullstellenmenge des Polynoms $(X - a_1) \cdots (X - a_k)$. Die Zariski-abgeschlossenen Mengen der affinen Geraden bestehen also aus allen endlichen Teilmengen (einschließlich der leeren) und der gesamten Menge.

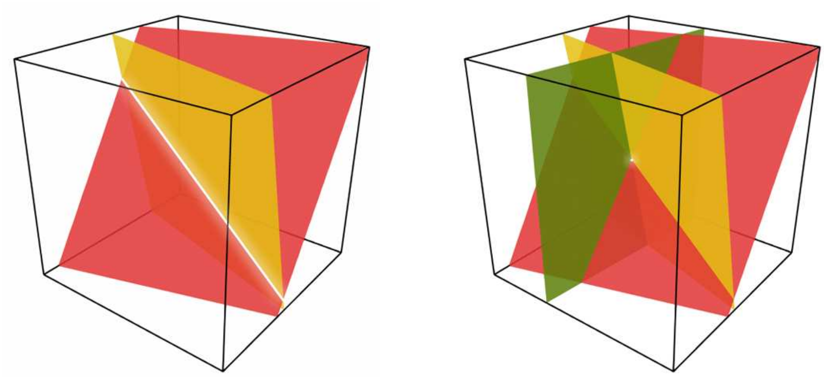
Beispiel 3. Jeder Punkt

$$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$$

ist Zariski-abgeschlossen, und zwar ist

$$P = V(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)\,.$$

Punkte sind (neben der leeren Menge und dem gesamten Raum) die einfachsten affin-algebraischen Mengen. Das Ideal $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$ ist maximal, siehe Aufgabe 2.6.



Das Verschwindungsideal

Definition 4. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\{F \in K[X_1, \ldots, X_n] : F(P) = 0 \text{ für alle P} \in \text{T}\}$$

das *Verschwindungsideal* zu T. Es wird mit $\operatorname{Id}(T)$ bezeichnet.

Es handelt sich dabei in der Tat um ein Ideal: wenn $F(P) = 0$ und $G(P) = 0$ ist für alle $P \in T$, so gilt dies auch für die Summe $F + G$ und für jedes Vielfache HF. Damit haben wir zwei Zuordnungen in entgegengesetzte Richtung. Einer Teilmenge im affinen Raum wird das Verschwindungsideal zugeordnet und einem Ideal im Polynomring das zugehörige Nullstellengebilde. Wir interessieren uns dafür, in wie fern sich Ideale und Nullstellengebilde entsprechen.

Beispiel 5. Sei $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Dann ist das Verschwindungsideal $\operatorname{Id}(P)$ gleich dem Ideal $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. Zunächst ist klar, dass die linearen Polynome $X_i - a_i$ im Punkt P verschwinden (wegen $(X_i - a_i)(P) = a_i - a_i = 0$). Damit gehört auch das von diesen Polynomen erzeugte Ideal zum Verschwindungsideal. Sei umgekehrt F ein Polynom mit $F(P) = 0$. Wir schreiben F in den „neuen Variablen“ $\tilde{X}_1 = X_1 - a_1, \ldots, \tilde{X}_n = X_n - a_n$, indem wir X_i durch $X_i - a_i + a_i$ ersetzen. In den neuen Variablen sei $F = \sum_\nu b_\nu \tilde{X}^\nu$. Dieses Polynom besteht aus der Konstanten b_0, in jedem anderen Monom kommt mindestens eine Variable vor. Also können wir schreiben

$$F = F_1\tilde{X}_1 + \ldots + F_n\tilde{X}_n + c\,,$$

mit gewissen Polynomen F_i. Daher ist $F(P) = c = 0$ und $F \in (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$.

Lemma 6. *Seien $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ zwei Teilmengen.*

Dann gilt für die zugehörigen Verschwindungsideale die Inklusion

$$\mathrm{Id}\,(W) \subseteq \mathrm{Id}\,(V)\,.$$

Beweis. Sei $F \in \mathrm{Id}\,(W)$, d.h. es ist $F(P) = 0$ für alle $P \in W$. Dann ist erst recht $F(P) = 0$ für alle $P \in V$. Also ist auch $F \in \mathrm{Id}\,(V)$. □

Lemma 7. *Sei $I \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist* $T \subseteq V(\mathrm{Id}(T))$.
(2) *Es ist* $I \subseteq \mathrm{Id}(V(I))$.
(3) *Es ist* $V(I) = V(\mathrm{Id}(V(I)))$.
(4) *Es ist* $\mathrm{Id}(T) = \mathrm{Id}(V(\mathrm{Id}(T)))$.

Beweis. (1). Sei $P \in T$ ein Punkt. Dann verschwindet nach Definition jedes Polynom $F \in \mathrm{Id}(T)$ auf T, also $P \in V(\mathrm{Id}(T))$.

(2). Sei $F \in I$. Dann verschwindet F auf ganz $V(I)$ und daher $F \in \mathrm{Id}\,(V)$.

(3). Nach (1), angewandt auf $T = V(I)$, haben wir die Inklusion „$\subseteq$ “. Nach (2) ist $I \subseteq \mathrm{Id}\,(V(I))$. Wendet man darauf $V(-)$ an, so ergibt sich nach Lemma 2.7 die andere Inklusion.

(4). Wie (3). □

Beispiel 8. Die Inklusionen in Lemma 3.7 (1), (2) sind echt. Sei zum Beispiel $T \subset \mathbb{A}_K^1$ eine unendliche echte Teilmenge (was voraussetzt, dass K unendlich ist). Dann ist $\mathrm{Id}(T) = 0$, und also ist $V(0) = \mathbb{A}_K^1$ echt größer als T.

Zu (2): Sei $I = (X^2)$, $R = K[X]$. Dann ist $V(I) = \{0\}$ und $\mathrm{Id}\,(\{0\}) = (X)$, aber $X^2 \notin (X)$. Ein extremeres Beispiel für $R = \mathbb{R}[X, Y]$ ist $I = (X^2 + Y^2)$ mit $V(I) = \{(0, 0)\}$. Das Verschwindungsideal zu diesem Punkt ist aber das Ideal (X, Y).

Lemma 9. *(Zariski-Abschluss) Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist der Zariski-Abschluss von T gleich*

$$\overline{T} = V(\mathrm{Id}\,(T))\,.$$

Beweis. Sei zunächst $P \in T$. Dann ist $F(P) = 0$ für alle $F \in \mathrm{Id}\,(T)$. Dann ist $P \in V(\mathrm{Id}\,(T))$. Da $V(\mathrm{Id}\,(T))$ nach Definition abgeschlossen ist, folgt $\overline{T} \subseteq V(\mathrm{Id}\,(T))$.

Sei umgekehrt $P \in V(\mathrm{Id}\,(T))$ und sei $P \notin \overline{T}$ angenommen. Dies bedeutet, dass es eine Zariski-offene Menge U gibt mit $P \in U$ und $U \cap T = \emptyset$. Sei $U = D(\mathfrak{a})$. Die Bedingung $P \in U$ bedeutet, dass es ein $G \in \mathfrak{a}$ geben muss mit $G(P) \neq 0$. Es ist dann $P \in D(G) \subseteq U$ und damit $T \cap D(G) = \emptyset$. Also ist $T \subseteq V(G)$ und somit $G \in \mathrm{Id}\,(T)$. Wegen $G(P) \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu $P \in V(\mathrm{Id}\,(T))$. □

Das Radikal

Definition 10. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R heißt *Radikal* (oder *Radikalideal*), wenn folgendes gilt: falls $f^n \in \mathfrak{a}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist bereits $f \in \mathfrak{a}$.

Definition 11. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann nennt man die Menge

$$\{f \in R : \text{ es gibt ein } r \text{ mit } f^r \in \mathfrak{a}\}$$

das *Radikal* zu $\mathfrak{a}$. Es wird mit $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ bezeichnet.

Das Radikal zu einem Ideal ist selbst ein Radikal und insbesondere ein Ideal.

Lemma 12. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist das Radikal zu $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ein Ideal vorliegt. 0 gehört offenbar zum Radikal und mit $f \in \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, sagen wir $f^r \in \mathfrak{a}$, ist auch $(af)^r = a^r f^r \in \mathfrak{a}$, also gehört af zum Radikal. Zur Summeneigenschaft seien $f, g \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$ mit $f^r \in (\mathfrak{a})$ und $g^s \in \mathfrak{a}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f+g)^{r+s} &= \sum_{i+j=r+s} \binom{r+s}{i} f^i g^j \\ &= \sum_{i+j=r+s,\, i<r} \binom{r+s}{i} f^i g^j + \sum_{i+j=r+s,\, i\geq r} \binom{r+s}{i} f^i g^j \in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

Sei nun $f^k \in \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$. Dann ist $(f^k)^r = f^{kr} \in \mathfrak{a}$, also $f \in \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$. □

Lemma 13. *Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist das Verschwindungsideal zu T ein Radikal.*

Beweis. Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom, und sei $F^s \in \operatorname{Id}(T)$. Dann ist $F^s(P) = 0$ für alle $P \in T$. Dann ist aber auch $F(P) = 0$ für alle $P \in V$, also $F \in \operatorname{Id}(T)$. □

Wir werden später sehen, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sich Radikale und algebraische Nullstellengebilde entsprechen. Das ist der Inhalt des *Hilbertschen Nullstellensatzes*.