## Monomiale Kurven

Wir spezialisieren nun die Theorie der Monoidringe auf den eindimensionalen Fall und gelangen zu denjenigen Ringen, die monomiale Kurven beschreiben.

**Definition 1.** Eine *monomiale Kurve* ist das Bild der affinen Geraden $\mathbb{A}_K^1$ unter einer Abbildung der Form

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n,\ t \longmapsto (t^{e_1}, \ldots, t^{e_n}),$$

mit $e_i \geq 1$ für alle $i$.

Wir werden gleich sehen, dass das Bild einer solchen monomialen Abbildung Zariski-abgeschlossen ist, d.h., dass eine monomiale Kurve wirklich eine algebraische Kurve ist. Eine monomiale Kurve ist insbesondere eine parametrisierte und damit eine rationale Kurve. Manchmal bezeichnet man auch die Abbildung selbst als monomiale Kurve. Häufig beschränkt man sich auf den Fall, wo die Exponenten $e_i$ insgesamt teilerfremd sind. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da man andernfalls stets schreiben kann $e_i = mf_i$ mit dem gemeinsamen Teiler $m$ und teilerfremden Zahlen $f_i$. Dann kann man die Gesamtabbildung auffassen als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n \text{ mit } t \longmapsto t^m = s \text{ und } s \longmapsto (s_1^{f_1}, \ldots, s_n^{f_n}),$$

wobei vorne ein einfaches Potenzieren und hinten eine monomiale Kurvenabbildung mit teilerfremden Exponenten vorliegt.

**Bemerkung 2.** Eine monomiale Abbildung $t \mapsto (t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n})$ ist nichts anderes als die zum Monoidmorphismus $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, die den $i$-ten Basisvektor auf $e_i$ schickt, gehörende Abbildung der zugehörigen $K$-Spektren. Diese Monoidabbildung faktorisiert

$$\mathbb{N}^n \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{N},$$

wobei $M$ das von den $e_i$ erzeugte Untermonoid der natürlichen Zahlen ist. Ein solches Untermonoid heißt *numerisches Monoid*. Die erste Abbildung ist dabei eine Surjektion. Es liegen also insgesamt Ringhomomorphismen

$$K[\mathbb{N}^n] = K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[M] \longrightarrow K[\mathbb{N}] = K[T]$$

und geometrisch die Spektrumsabbildungen

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow K - \operatorname{Spek}(K[M]) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

vor. Das Bild der affinen Geraden liegt also im $K$-Spektrum des Monoidringes $K[M]$. Wir werden weiter unten sehen, dass die Abbildung $\mathbb{A}_K^1 \to K-\operatorname{Spek}(K[M])$ stets surjektiv ist und im Fall, dass die Exponenten $e_i$ teilerfremd sind, auch injektiv.

**Beispiel 3.** Die *Neilsche Parabel* $C$ ist das Bild unter der monomialen Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ t \longmapsto (t^2, t^3) = (x, y).$$

Die zugehörige Gleichung ist $y^2 = x^3$, d.h. es ist $C = V(Y^2 - X^3)$.

Das Besondere an monomialen Kurven ist, dass sie zwar allein durch das Exponententupel $(e_1, \ldots, e_n)$ bzw. das davon erzeugte numerische Monoid gegeben sind, also durch einen sehr kleinen Betrag an (kombinatorischer) Information, aber zugleich ein reichhaltiges Beispielmaterial an algebraischen Kurven liefern (dies gilt allgemein für Monoidringe und die dadurch definierten algebraischen Varetäten).

**Lemma 4.** *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen $e_1, \ldots, e_n$ erzeugt sei. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Darstellung*

$$m = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n \text{ mit } 0 \leq a_i < e_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq n-1\,.$$

*Für $m$ hinreichend groß kann man zusätzlich noch $a_n \geq 0$ erreichen, so dass es dann eine Darstellung mit nichtnegativen Koeffizienten gibt.*

*Beweis.* Wegen der Teilerfremdheit gibt es natürlich eine Darstellung

$$m = b_1e_1 + \ldots + b_ne_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $b_i$. Wir werden sie schrittweise auf die gewünschte Gestalt bringen. Wir schreiben $b_1 = c_1e_2 + a_1$ mit $0 \leq a_1 < e_2$ (Division mit Rest). Dies setzt man in die Gleichung für $m$ ein und schlägt den Term $c_1e_2e_1$ zu $b_2e_2$ dazu. Ebenso bringt man den (neuen) zweiten Koeffizienten auf die gewünschte Form, in dem man ihn mit dem dritten Erzeuger verarbeitet. So kann man alle ersten $n-1$ Koeffizienten auf die gewünschte Gestalt bringen.

Sei die Darstellung nun in der gewünschten Form. Dann ist die Summe der ersten $n-1$ Summanden beschränkt. Wenn $m$ größer als diese Schranke ist, so muss der letzte Summand und damit auch der letzte Koeffizient nichtnegativ sein. □

Zu einem von teilerfremden Elementen erzeugten Untermonoid gehören also ab einer gewissen Stelle alle natürlichen Zahlen. Diese bekommt sogar einen eigenen Namen.

**Definition 5.** Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man die minimale Zahl $f$ mit $\mathbb{N}_{\geq f} \subseteq M$ die *Führerzahl* von $M$.

Wir geben noch einige weitere Definitionen von numerischen Invarianten von monomialen Kurven, die man diskret, also auf der Ebene des numerischen Monoids berechnen kann. Wir werden später sehen, dass diese Invarianten allgemeiner für beliebige algebraische Kurven definiert werden können, dort aber im allgemeinen schwieriger zu berechnen sind.

**Definition 6.** Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man die Anzahl der Lücken, d.h. der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} - M$, den *Singularitätsgrad* von $M$, geschrieben $\delta(M)$.

**Definition 7.** Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid mit teilerfremden Erzeugern. Dann nennt man die minimale Anzahl von Elementen in einem Erzeugendensystem für $M$ die *Einbettungsdimension* von $M$.

**Definition 8.** Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man das minimale (positive) Element $e \in M, e \geq 1$ , die *Multiplizität* von $M$, geschrieben $e(M)$.

**Beispiel 9.** Wir betrachten das durch $5, 8$ und $11$ erzeugte numerische Monoid $M$. $M$ besteht also aus allen Summen $5a_1+8a_2+11a_3$ mit nichtnegativen Koeffizienten $a_1, a_2, a_3$. Es lässt sich einfach überlegen, dass $M$ die folgenden Elemente enthält:

$$0, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \ldots .$$

Da es insbesondere fünf Zahlen hintereinander enthält (von 18 bis 22), muss jede weitere Zahl auch dazu gehören, da man ja einfach $5 \in M$ dazuaddieren kann. Damit ist die Führerzahl 18, die Multiplizität ist 5, der Singularitätsgrad ist 10 und die Einbettungsdimension ist 3.

**Satz 10.** *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde natürliche Zahlen $e_1, \ldots, e_n$ erzeugtes Untermonoid. Dann ist die monomiale Abbildung*

$$\mathbb{A}^1_K \longrightarrow K\!-\!\operatorname{Spek}(K[M])$$

*eine Bijektion.*

*Beweis.* Die Abbildung kann man auffassen als die natürliche Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, K),$$

die durch die Inklusion von Monoiden $M \subseteq \mathbb{N}$ induziert ist. Zur Injektivität seien $a, b \in K$ gegeben und sei angenommen, dass für alle $m \in M$ gilt: $a^m = b^m$. Bei $b = 0$ folgt sofort $a = 0$, sei also $b \neq 0$. Dann gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^m = 1$ für alle $m \in M$. Da es für $M$ ein teilerfremdes Erzeugendensystem gibt, gehören nach Lemma 18.4 ab einem gewissen $f$ alle natürlichen Zahlen zu $M$. Es ist also insbesondere $a^m = b^m$ für alle $m \geq f$. Daraus folgt aber $\frac{a}{b} = 1$ (und $a = b$): seien nämlich $m$ und $k \geq f$ und teilerfremd, und sei $s^m = s^k = 1$. Wegen der Teilerfremdheit gibt es (nach dem Lemma von Bezout) ganze Zahlen $p, q$ mit $pk + qm = 1$. Dann ist

$$s = s^{pk+qm} = (s^k)^p \cdot (s^m)^q = 1 .$$

Zur Surjektivität. Es sei ein Monoidmorphismus $\varphi : M \to K$ gegeben, und wir müssen ihn zu einem Monoidmorphismus auf ganz $\mathbb{N}$ fortsetzen. Es sei $\varphi(e_i) = a_i \in K$. Zwischen diesen Werten gilt die Beziehung

$$a_j^{e_i} = \varphi(e_j)^{e_i} = \varphi(e_i e_j) = \varphi(e_i)^{e_j} = a_i^{e_j} .$$

Wenn eines der $a_i = 0$ ist, so müssen alle $= 0$ sein und die Nullabbildung ist eine Fortsetzung. Wir können also annehmen, dass alle $a_i$ Einheiten sind. Wegen der Teilerfremdheit der $e_i$ gibt es eine Darstellung der Eins, d.h. es gibt ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ mit $m_1 e_1 + \ldots + m_n e_n = 1$. Wir behaupten, dass durch $1 \mapsto a = a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}$ eine Fortsetzung auf $\mathbb{N}$ gegeben ist. Dazu müssen wir zeigen, dass der durch $1 \mapsto a$ (also $k \mapsto a^k$) definierte Monoidmorphismus mit $\varphi$ übereinstimmt, was man nur für die $e_i$ überprüfen muss. Betrachten wir also $e_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} a^{e_1} &= (a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n})^{e_1} \\ &= a_1^{e_1 m_1} \cdot a_2^{e_1 m_2} \cdots a_n^{e_1 m_n} \\ &= a_1^{1-\sum_{i=2}^n m_i e_i} (a_2^{e_1 m_2} \cdots a_n^{e_1 m_n}) \\ &= a_1 \cdot (a_1^{-m_2 e_2} a_2^{e_1 m_2}) \cdots (a_1^{-m_n e_n} a_n^{e_1 m_n}) \\ &= a_1 \cdot (a_1^{-e_2} a_2^{e_1})^{m_2} \cdots (a_1^{-e_n} a_n^{e_1})^{m_n} \\ &= a_1 \, , \end{aligned}$$

da die Faktoren rechts in der vorletzten Zeile alle 1 nach der Vorüberlegung (oberes Display) sind. □

**Bemerkung 11.** Den vorstehenden Satz kann man auch über die universelle Eigenschaft der Differenzgruppe beweisen. Wir skizzieren dies kurz für die Surjektivität. Die Differenzgruppe eines numerischen Monoids mit teilerfremden Erzeugern ist $\mathbb{Z}$. Der Fall, dass ein Erzeuger auf null geht, wird wie im Beweis abgehandelt. Dann kann man davon ausgehen, dass ein Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to K^\times$ in die Einheitengruppe des Körpers vorliegt. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft der Monoidringe eine (eindeutig bestimmte) Fortsetzung $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z} \to K^\times$, die das Urbild liefert (diese Bemerkung verdanken wir Herrn Hebestreit.)