

## Algebraische Kurven

### Vorlesung 13

#### Die offenen Mengen $D(f)$

Wir wollen zeigen, dass die Zariski-offenen Teilmengen  $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$  selbst homöomorph zum  $K$ -Spektrum einer endlich erzeugten  $K$ -Algebra sind. Dazu benötigen wir den Begriff des multiplikativen Systems und der Nenneraufnahme.

DEFINITION 13.1. Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge  $S \subseteq R$  heißt *multiplikatives System*, wenn die beiden Eigenschaften

- (1)  $1 \in S$
- (2) Wenn  $f, g \in S$ , dann ist auch  $fg \in S$

gelten.

BEISPIEL 13.2. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $f \in R$  ein Element. Dann bilden die Potenzen  $f^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein multiplikatives System.

DEFINITION 13.3. Sei  $R$  ein Integritätsbereich und sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System,  $0 \notin S$ . Dann nennt man den Unterring

$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} : f \in R, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$

die *Nenneraufnahme* zu  $S$ .

Für die Nenneraufnahme an einem Element  $f$  schreibt man einfach  $R_f$  statt  $R_{\{f^n | n \in \mathbb{N}\}}$ . Für den Begriff der Nenneraufnahme für beliebige kommutative Ringe, siehe Aufgabe \*\*\*\*\*.

SATZ 13.4. Sei  $K$  ein Körper und sei  $R$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra,  $f \in R$ . Dann ist die Zariski-offene Menge  $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$  in natürlicher Weise isomorph zu  $K - \text{Spek}(R_f)$ .

*Beweis.* Wir betrachten die zum  $K$ -Algebra-Homomorphismus  $\varphi: R \rightarrow R_f$  gehörende natürliche Abbildung

$$\varphi^*: K - \text{Spek}(R_f) \longrightarrow K - \text{Spek}(R), P \longmapsto P \circ \varphi,$$

die nach Fakt \*\*\*\*\* stetig ist. Es ist  $f(P \circ \varphi) = P(\varphi(f)) \neq 0$ , da ja  $f$  in  $R_f$  eine Einheit wird. Daher liegt das Bild von  $\varphi^*$  in  $D(f)$ . Sei  $Q \in D(f)$  irgendein Punkt, d.h.  $Q$  ist ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus  $Q: R \rightarrow K$  mit  $Q(f) \neq 0$ . Dann ist  $Q(f)$  eine Einheit und daher faktorisiert dieser Homomorphismus nach der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme (siehe

Aufgabe \*\*\*\*\*) durch  $R_f$ . Dieser Morphismus ist das gesuchte Urbild und daher ist  $\varphi^*$  surjektiv. Zur Injektivität seien zwei  $K$ -Algebra-Homomorphismen  $P_1, P_2 : R_f \rightarrow K$  gegeben, deren Verknüpfung mit  $R \rightarrow R_f$  übereinstimmen. Wegen

$$P_1 \left( \frac{r}{f^s} \right) = P_1(rf^{-s}) = P_1(r)P_1(f^s)^{-1}$$

und ebenso für  $P_2$  ist dann aber  $P_1 = P_2$ . Zur Homöomorphie ist lediglich zu beachten, dass die Zariski-offenen Mengen von  $K - \text{Spek}(R_f)$  überdeckt werden von  $D(g)$ ,  $g \in R_f$ . Dabei kann man  $g \in R$  annehmen, da  $f$  eine Einheit in  $R_f$  ist. Dann ist aber dieses  $D(g)$  gleich  $(\varphi^*)^{-1}(D(gf))$ , wo letzteres  $D(gf)$  die offene Menge in  $K - \text{Spek}(R)$  bezeichnet.  $\square$

**BEMERKUNG 13.5.** Fakt \*\*\*\*\*) besagt insbesondere, dass eine offene Menge  $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$  selbst das  $K$ -Spektrum einer endlich erzeugten  $K$ -Algebra ist (nämlich von  $R_f$ , das über  $R$  von  $1/f$  erzeugt wird), und sich daher auch als Zariski-abgeschlossene Menge eines affinen Raumes realisieren lassen muss. Aus  $R_f \cong R[T]/(Tf - 1)$  (siehe Aufgabe \*\*\*\*\*) erhält man eine solche Realisierung. Sei  $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ . Dann liefert der surjektive Ringhomomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n, T] \longrightarrow (K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T] \longrightarrow ((K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T])/(Tf - 1) \cong R_f$$

eine abgeschlossene Einbettung von  $D(f)$  in  $\mathbb{A}_K^{n+1}$ . Ist  $\psi$  die Gesamtinklusion

$$D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R) \subseteq \mathbb{A}_K^n,$$

so kann man die abgeschlossene Einbettung auch als

$$\psi \times \frac{1}{f} : D(f) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n \times \mathbb{A}_K^1$$

auffassen, wobei hier wieder das Produkt von Varietäten auftritt.

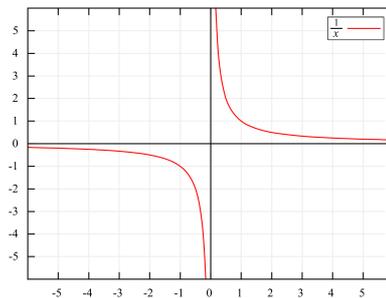
**BEISPIEL 13.6.** Betrachten wir in Anschluss an Bemerkung \*\*\*\*\*) die offene Menge

$$D(X) = \{P \in \mathbb{A}_K^1 : P \neq 0\} \subset \mathbb{A}_K^1.$$

Diese offene Menge nennt man die *punktierte affine Gerade*. Auf dieser offenen Menge ist  $X$  invertierbar, d.h. die rationale Funktion  $\frac{1}{X}$  ist darauf definiert. Diese Abbildung liefert zusammen mit der gegebenen (offenen) Inklusion  $D(X) \subset \mathbb{A}_K^1$  die abgeschlossene Inklusion

$$D(X) \longrightarrow V(XY - 1) \subset \mathbb{A}_K^2, x \longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right),$$

dessen Bild eine (in der affinen Ebene abgeschlossene) Hyperbel ist. Die punktierte affine Gerade und die Hyperbel sind also homöomorph (und die zugehörigen Ringe, nämlich  $K[X]_X = K[X, X^{-1}]$  und  $K[X, Y]/(XY - 1)$ , sind isomorph).



### Zusammenhang und idempotente Elemente

Wir interessieren uns dafür, wie es sich auf den Koordinatenring auswirkt, wenn eine affin-algebraische Menge zusammenhängend ist, und wie sich gegebenenfalls die Zusammenhangskomponenten charakterisieren lassen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das zeigt, dass über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper keine überzeugende Theorie zu erwarten ist.

BEISPIEL 13.7. Wir betrachten (wie in Beispiel \*\*\*\*\*) die beiden algebraischen Kurven

$$V_1 = V(X^2 + Y^2 - 2) \text{ und } V_2 = (X^2 + 2Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_K^2.$$

Der Durchschnitt wird beschrieben durch das Ideal

$$(X^2 + Y^2 - 2, X^2 + 2Y^2 - 1) = (Y^2 + 1, X^2 - 3).$$

Sei  $K = \mathbb{R}$ . Dann ist  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  leer.

Die affin-algebraische Menge  $V = V_1 \cup V_2$  ist nicht zusammenhängend ( $V_1$  und  $V_2$  sind die irreduziblen Komponenten und die Zusammenhangskomponenten). Der Koordinatenring von  $V$  ist

$$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 2)(X^2 + 2Y^2 - 1).$$

Man könnte erwarten, dass die Funktion auf  $V$ , die auf  $V_1$  konstant gleich 1 und auf  $V_2$  konstant gleich 0 ist, sich im Koordinatenring wiederfindet. Dies ist aber nicht der Fall, und zwar liegt das daran, dass über den komplexen Zahlen  $V_{\mathbb{C}}$  zusammenhängend ist. Daher besitzt der komplexe Koordinatenring nur die trivialen idempotenten Elemente, und das überträgt sich auf den reellen Koordinatenring von.

DEFINITION 13.8. Ein Element  $e$  eines kommutativen Ringes heißt *idempotent*, wenn  $e^2 = e$  gilt.

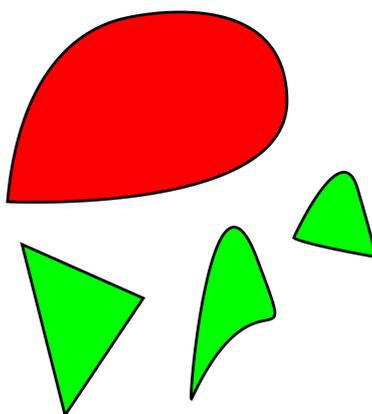
DEFINITION 13.9. Seien  $R_1, \dots, R_n$  kommutative Ringe. Dann heißt das Produkt

$$R_1 \times \cdots \times R_n,$$

versehen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation, der *Produkt-ring* der  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

In einem Produktring gibt es viele idempotente Elemente, nämlich solche Elemente, deren Komponenten alle null oder eins sind.

DEFINITION 13.10. Ein kommutativer Ring  $R$  heißt *zusammenhängend*, wenn er genau zwei idempotente Elemente (nämlich  $0 \neq 1$ ) enthält.



Ein zusammenhängender topologischer Raum (rot) und ein nicht zusammenhängender Raum (grün).

DEFINITION 13.11. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn es in  $X$  genau zwei Teilmengen gibt (nämlich  $\emptyset$  und der Gesamttraum  $X$ ), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die leere Menge und der Gesamttraum sind stets zugleich offen und abgeschlossen. Solche Mengen nennt man auch *randlos* oder *clopen*. Der leere topologische Raum gilt nicht als zusammenhängend, da es in ihm nur eine zugleich offene und abgeschlossene Menge gibt.

LEMMA 13.12. Sei  $K$  ein Körper und seien  $R_1$  und  $R_2$  endlich erzeugte  $K$ -Algebren mit dem Produktring  $R = R_1 \times R_2$ . Dann gibt es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \text{Spek}(R_1 \times R_2) \cong K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2).$$

Dabei werden die Einbettungen von rechts nach links durch die Projektionen  $R \rightarrow R_i$ ,  $i = 1, 2$ , induziert.

*Beweis.* Die Projektion  $R_1 \times R_2 \rightarrow R_1$  ist ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus und liefert daher (nach Proposition 12.8 (3)) eine stetige Abbildung (und zwar eine abgeschlossene Einbettung)

$$K - \text{Spek}(R_1) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Ebenso gibt es eine Abbildung auf  $K - \text{Spek}(R_1)$ . Diese zusammengenommen definieren eine stetige Abbildung

$$K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Sei  $P \in K - \text{Spek}(R_1 \times R_2)$ , also  $P : R_1 \times R_2 \rightarrow K$  sei ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus. Seien  $e_1 = (1, 0)$  und  $e_2 = (0, 1)$  die zur Produktzerlegung gehörenden idempotenten Elemente. Wegen  $e_1 + e_2 = 1$  und  $e_1 e_2 = 0$  wird genau eines dieser Elemente (sagen wir  $e_1$ ) unter  $P$  auf null abgebildet (das andere auf 1). Dann wird aber  $R_1 \times 0$  auf null geschickt und  $P$  faktorisiert durch eine Projektion. Das beweist die Surjektivität.

Zur Injektivität seien  $P_1, P_2$  in der disjunkten Vereinigung gegeben,  $P_1 \neq P_2$ . Wenn sie beide in einem der Teilstücke liegen, so bleiben sie unter der Abbildung verschieden, da auf den Teilstücken eine abgeschlossene Einbettung vorliegt. Wenn sie auf verschiedenen Teilstücken liegen, so faktorisieren sie durch die zwei verschiedenen Projektionen und für den einen Punkt ist  $P_1(e_1) = 0$  und für den anderen Punkt  $P_2(e_1) = 1$ . Sie sind also verschieden als Elemente in 1).

Eine Homöomorphie liegt vor, da sich die einzelnen abgeschlossenen Einbettungen zu einer abgeschlossenen Abbildung zusammensetzen.  $\square$

**SATZ 13.13.** *Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei  $R$  eine reduzierte kommutative  $K$ -Algebra von endlichem Typ. Dann stiftet die Abbildung*

$$e \longmapsto D(e)$$

*eine Bijektion zwischen den idempotenten Elementen in  $R$  und denjenigen Teilmengen aus  $K - \text{Spek}(R)$ , die sowohl offen also auch abgeschlossen sind.*

*Beweis.* Zunächst ist  $D(e) = V(1 - e)$  offen und abgeschlossen. Dies folgt aus

$$D(e) \cup D(1 - e) = D(1) = K - \text{Spek}(R)$$

und aus

$$D(e) \cap D(1 - e) = D(e(1 - e)) = D(e - e^2) = D(0) = \emptyset.$$

D.h. die Abbildung ist wohldefiniert. Seien  $e_1, e_2$  zwei idempotente Elemente mit  $U = D(e_1) = D(e_2)$ . Da ein idempotentes Element in einem Körper nur die Werte null oder eins annehmen kann, haben sowohl  $e_1$  als auch  $e_2$  auf  $U$  den Wert 1 und außerhalb den Wert 0. Damit haben  $e_1$  und  $e_2$  überall den gleichen Wert und sind nach dem Identitätssatz für Polynome (siehe Aufgabe 13.1) überhaupt gleich. Dies beweist die Injektivität.

Sei nun  $U = D(\mathfrak{a})$  sowohl offen als auch abgeschlossen. D.h. es gibt ein weiteres Ideal  $\mathfrak{b}$  mit

$$D(\mathfrak{a}) \cup D(\mathfrak{b}) = K - \text{Spek}(R) \text{ und } D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}) = \emptyset.$$

Nach Fakt \*\*\*\*\* erzeugen  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  zusammen das Einheitsideal. D.h. es gibt  $a \in \mathfrak{a}$  und  $b \in \mathfrak{b}$  mit  $a + b = 1$ . Wegen  $D(a) \cap D(b) = D(ab) = \emptyset$  ist nach

Aufgabe \*\*\*\*\* das Element  $ab$  nilpotent und wegen der Reduziertheit ist  $ab = 0$ . Also ist

$$a = a \cdot 1 = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$$

idempotent und  $U = D(a)$ . □

Es folgt, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine (reduzierte)  $K$ -Algebra  $R$  von endlichem Typ genau dann zusammenhängend ist, wenn das zugehörige  $K$ -Spek  $(R)$  zusammenhängend ist.

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Hyperbola one over x.svg , Autor = Benutzer Ktims auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 3
- Quelle = Connected and disconnected spaces2.svg , Autor = Benutzer Dbc334 auf Commons, Lizenz = PD 4