Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 4

Abbildungen

Definition 4.1. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F : L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen

$$F, G : L \longrightarrow M$$

sind gleich, wenn sie die gleiche Definitionsmenge und die gleiche Wertemenge besitzen und wenn für alle $x \in L$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in M gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Eine Abbildung kann man auch sehen als eine spezielle Relation $R \subseteq L \times M$, nämlich als eine Relation mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in L$ genau ein $y \in M$ gibt mit $(x, y) \in R$. Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

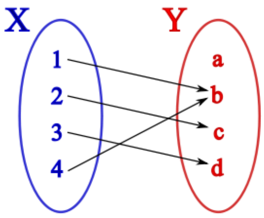
Zu jeder Menge M nennt man die Abbildung

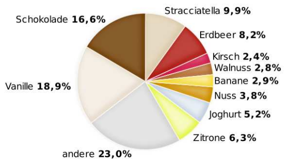
$$M \longrightarrow M,\, x \longmapsto x,$$

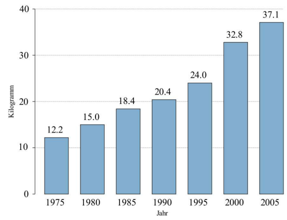
also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität*(auf M). Sie wird mit Id_M bezeichnet.

Darstellungsmöglichkeiten von Abbildungen

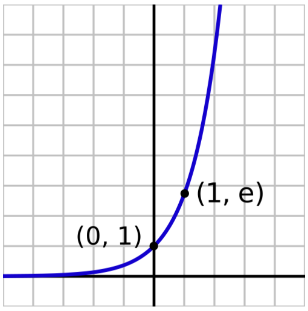
Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.



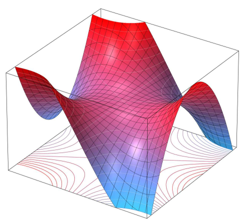


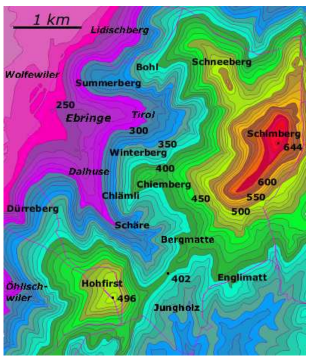


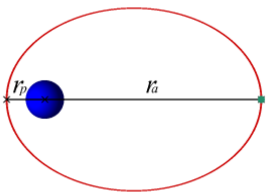
x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1



$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1







Injektive und surjektive Abbildungen

Definition 4.2. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

- *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.
- *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.
- *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 4.3. Es sei $F : L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G : M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Graph, Bild und Urbild einer Abbildung

Definition 4.4. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) : x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graph* der Abbildung F.

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Formal kann man auch Abbildungen als Graphen (spezielle Relationen) einführen. Man muss den Graph von seiner visuellen Realisierung unterscheiden, eine solche ist nicht immer möglich und hängt davon ab, ob man die Produktmenge aus Definitionsmenge und Wertemenge gut visualisieren kann.

Definition 4.5. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M : \text{ es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von S* unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \text{Bild}\,(F)$$

das *Bild der Abbildung*.

Definition 4.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L : \, F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T* unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von y*.

Hintereinanderschaltung von Abbildungen

Definition 4.7. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) = G(F(x))\,,$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 4.8. *Es seien L, M, N und P und Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta : L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x).\end{aligned}$$

□

Lemma 4.9. *Es seien L und M Mengen und es sei*

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *F ist bijektiv.*
(2) *Es gibt eine Abbildung*

$$G : M \longrightarrow L$$

mit

$$G \circ F = \mathrm{id}_L \text{ und } F \circ G = \mathrm{id}_M\,.$$

(3) *Es gibt eine Abbildung $G : M \to L$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_L$ und es gibt eine Abbildung $H : M \to L$ mit $F \circ H = \mathrm{id}_M$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei also F bijektiv und wir müssen eine Abbildung G mit den angegebenen Eigenschaften finden. Wir behaupten, dass die Umkehrabbildung F^{-1} diese Eigenschaften erfüllt. Für jedes $x \in L$ ist $(F^{-1} \circ F)(x) = F^{-1}(F(x))$. Das Element x wird auf $F(x)$ abgebildet und es ist das einzige Element aus L mit dieser Eigenschaft. Daher ist nach Definition der Umkehrabbildung $x = F^{-1}(F(x))$. Also ist $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_L$.

Für jedes $y \in M$ ist $(F \circ F^{-1})(y) = F(F^{-1}(y))$. Nach der Definition von F^{-1} ist $F^{-1}(y)$ dasjenige Element aus L, dass von F auf y abgebildet wird. Also ist $F(F^{-1}(y)) = y$ und damit ist $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}\ _M$

(2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial, da das G aus (2) sowohl die Eigenschaft von G aus (3) als auch die Eigenschaft von H aus (3) erfüllt.

(3) $\Rightarrow$ (1). Es gebe nun die Abbildungen G und H mit den beschriebenen Eigenschaften. Wir möchten zeigen, dass dann F bijektiv ist, also sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Zum Nachweis der Injektivität seien

$$x, x' \in L \text{ gegeben mit } F(x) = F(x')\,.$$

Wir wenden darauf die Abbildung G an und erhalten

$$G(F(x)) = G(F(x'))\,.$$

Da $G \circ F = \mathrm{Id}_L$ ist, folgt direkt $x = x'$.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \in M$ beliebig vorgegeben. Wir behaupten, dass $H(y) \in L$ durch F auf y abgebildet wird. Dies folgt direkt aus

$$F(H(y)) = \mathrm{Id}_M(y) = y\,.$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis