Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 4

Abbildungen

Definition 4.1. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F : L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Eine Abbildung kann man auch sehen als eine spezielle Relation $R \subseteq L \times M$, nämlich also eine Relation mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in L$ genau ein $y \in M$ gibt mit xRy. Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Injektive und surjektive Abbildungen

Definition 4.2. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

- *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene (!) Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

- *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.
- *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in M$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 4.3. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) : \, x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graph* der Abbildung F.

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Formal kann man auch Abbildungen als Graphen (spezielle Relationen) einführen. Man muss den Graph von seiner visuellen Realisierung unterscheiden, eine solche ist nicht immer möglich.

Definition 4.4. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M : \text{ es gibt ein } x \in L \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von S unter F*. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \text{Bild}\,(F)$$

das *Bild der Abbildung*.

Definition 4.5. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L : \ F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T* unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von y*.

Definition 4.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt die Abbildung

$$S \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

die *Einschränkung der Abbildung* auf die Teilmenge S.

Hintereinanderschaltung von Abbildungen

Definition 4.7. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N, \, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N, \, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 4.8. *Es seien L, M, N und P und Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N, \, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P, \, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F \, .$$

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta : L \rightarrow P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x). \end{aligned}$$

□

Tupel

In der Definition einer Abbildung sind die Definitionsmenge und die Wertemenge grundsätzlich gleichwichtig. Dennoch gibt es Situationen, wo mal das Hauptgewicht auf der einen oder der anderen Menge liegt. Der allgemeine Abbildungsbegriff deckt eben auch Situationen ab, bei denen man zunächst gar nicht unbedingt an Abbildungen denkt.

Betrachten wir bspw. die Potenzmenge einer Menge M. Jede Teilmenge von M kann man mit einer Abbildung von M in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ identifizieren, siehe Aufgabe 4.10. Hier ist also die Wertemenge extrem einfach und die Abbildung repräsentiert an jeder Stelle eine Ja/Nein-Entscheidung.

Andererseits kann man (geordnete) Paare (x, y) zu einer Menge M, also Elemente aus der Produktmenge $M \times M$, als eine Abbildung

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow M$$

ansehen, mit $f(1) = x$ und $f(2) = y$. Hier identifiziert man also die Abbildung mit der geordneten Aufzählung der Werte. In einer solchen Situation bezeichnet man die Abbildung häufig mit einem Symbol, das sich an den Bezeichnungen für die Elemente aus M anlehnt. Wenn man bspw. die Elemente aus M mit x bezeichnet, so schreibt man für ein Paar häufig

$$x = (x_1, x_2)$$

In der Sprache der Abbildungen ist dabei x_i der Wert der Abbildung x an der Stelle i. Die Schreibweise x_i (statt $x(i)$) suggeriert, dass das Hauptgewicht darauf liegt, was in der Wertemenge M passiert, und nicht in der Definitionsmenge.

Definition 4.9. Es seien I und M Mengen. Dann nennt man eine Abbildung

$$x : I \longrightarrow M,\ i \longmapsto x_i,$$

auch ein I- *Tupel* in M. Bei $I = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einem n- *Tupel* in M.

Die Menge I heißt in diesem Zusammenhang auch *Indexmenge*, ein Element aus der Indexmenge heißt *Index*. Bei einem I-Tupel x sind die Elemente durch die Indices indiziert. Zu $i \in I$ heißt x_i die i-te *Komponente* des Tupels. Ein n-Tupel schreibt man meist als

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Bei einer zweielementigen Indexmenge spricht man von einem *Paar*, bei einer dreielementigen Menge von einem *Tripel*.

Die Menge aller I-Tupel wird mit

$$M^I = \{f : I \to M\} = \mathrm{Abb}\,(I, M)$$

bezeichnet. Bei $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man auch

$$M^n = M^{\{1,\ldots,n\}} = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\mathrm{mal}}\,.$$

Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ ist also nichts anderes als die Menge der Zweitupel von reellen Zahlen, der reelle Raum $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen reellen Tripeln.

Bei $I = \mathbb{N}$ spricht man von *Folgen* in M, worauf wir in aller Ausführlichkeit noch eingehen werden. Eine endliche Indexmenge kann man stets durch eine Menge der Form $\{1, \ldots, n\}$ ersetzen (diesen Vorgang kann man eine Nummerierung der Indexmenge nennen), doch ist das nicht immer sinnvoll. Wenn man z.B. mit einer Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ startet und sich dann für gewisse Teilindexmengen $J \subseteq I$ interessiert, so ist es natürlich, die von I ererbten Bezeichnungen beizubehalten, anstatt J mit einer neuen Nummerierung $\{1, \ldots, m\}$ zu versehen. Häufig gibt es für ein bestimmtes Problem „natürliche“ Indexmengen, die (allein schon memotechnisch) einen Teil des strukturellen Gehalts des Problems widerspiegeln. Eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ wird z.B. durch eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten beschrieben, also insgesamt mit mn Einträgen. Diese Matrixeinträge indiziert man am einfachsten mit einem Doppelindex

$$a_{ij}\,,$$

wobei der eine Index für den Spaltenindex und der andere für den Zeilenindex steht. Durch eine solche natürliche Bezeichnung ist stets der Bezug klar, und dieser würde völlig abhanden kommen, wenn man eine neue Indexmenge der Form $\{1, 2, \ldots, mn\}$ einführen würde.

Familien von Mengen

Es können nicht nur Elemente, sondern auch Mengen durch eine Indexmenge indiziert werden. Dann spricht man von einer Mengenfamilie.

Definition 4.10. Es sei I eine Menge und zu jedem i sei eine Menge M_i gegeben. Eine solche Situation nennt man eine *Familie von Mengen*

$$M_i\ ,\ i \in I.$$

Die Menge I heißt dann die *Indexmenge* der Mengenfamilie.

Dabei können die Mengen völlig unabhängig voneinander sein, es kann aber auch sein, dass sie alle Teilmengen einer bestimmten Grundmenge sind.

Definition 4.11. Es sei M_i, $i \in I$, eine Familie von Teilmengen einer Grundmenge G. Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \in G : \, x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

der *Durchschnitt der Mengen* und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \in G : \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

die *Vereinigung der Mengen*.

Man beachte, dass dabei der Durchschnitt und die Vereinigung auf den All- bzw. den Existenzquantor zurückgeführt wird.

Beispiel 4.12. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N_n = \{x \in \mathbb{N} : \, x \geq n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die mindestes so groß wie n sind. Diese ist eine durch die natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$N_n \subseteq N_m \text{ für } n \geq m \, .$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die größer/gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Beispiel 4.13. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$\mathbb{N}n = \{x \in \mathbb{N} : \, x \text{ ist ein Vielfaches von } n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die Vielfache von n sind. Dies ist eine durch die positiven natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N}n \subseteq \mathbb{N}m \text{ für } m \text{ teilt } n \, .$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}n$$

ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die ein Vielfaches von jeder positiven natürlichen Zahl ist.

Beispiel 4.14. Es sei x eine reelle Zahl[1] und es sei x_n diejenige rationale Zahl, die sich aus allen Vorkommaziffern und den ersten n Nachkommaziffern von x im Dezimalsystem ergibt. Wir definieren die Intervalle

$$M_n = [x_n, x_n + (\frac{1}{10})^n] \subset \mathbb{R}\,.$$

Dies sind Intervalle der Länge $(\frac{1}{10})^n$ und es ist

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\,.$$

Die Familie M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist also eine *Intervallschachtelung* für x.

Beispiel 4.15. Es sei M eine Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv[2]

$$M_0 = M \text{ und } M_n = \mathfrak{P}\,(M_{n-1}) \text{ für } n \geq 1\,.$$

Man nimmt also jeweils von der Vorgängermenge die Potenzmenge. Ein Element aus dem Produkt

$$(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

besteht also in der nullten Komponenten aus einem Element aus M, in der ersten Komponenten aus einer Teilmenge von M, in der zweiten Komponenten aus einer Menge von Teilmengen von M usw. Zwischen den einzelnen Mengen aus der Familie besteht keine Inklusionsbeziehung.

Definition 4.16. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$M = \prod_{i \in I} M_i = \{(x_i) : x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

die *Produktmenge* der M_i.

Sobald eine der beteiligten Mengen M_i leer ist, ist auch das Produkt leer, da es dann für die i-te Komponente keinen möglichen Wert gibt. Wenn aber umgekehrt alle Mengen M_i nicht leer sind, so ist auch ihr Produkt nicht leer, da man für jeden Index i dann ein Element $x_i \in M_i$ wählen kann. Bei einem formalen axiomatischen Aufbau der Mengentheorie muss man übrigens fordern, dass dieses Wählen möglich ist. Dies ist der Inhalt des *Auswahlaxioms*.

[1] Die reellen Zahlen werden wir später axiomatisch einführen, Intervallschachtelungen repräsentieren ein wichtiges Existenzprinzip für reelle Zahlen.

[2] Es wird also eine Definition unter Bezug auf einen Vorgänger gemacht. Dieses Verfahren besprechen wir genauer, wenn es um natürliche Zahlen und Induktion geht.