Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 80

Produkte von Mannigfaltigkeiten

Definition 80.1. Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit den Atlanten $(U_i, U_i', \alpha_i, i \in I)$ und $(V_j, V_j', \beta_j, j \in J)$. Dann nennt man den Produktraum $M \times N$ mit den Karten

$$\alpha_i \times \beta_j : U_i \times V_j \longrightarrow U_i' \times V_j'$$

(mit $(i, j) \in I \times J$ und $U_i' \times V_j' \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$) das *Produkt der Mannigfaltigkeiten* M und N.

Es handelt sich dabei in der Tat um eine Mannigfaltigkeit, siehe Aufgabe 80.1.

Lemma 80.2. *Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M \times N$ ihr Produkt. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Projektionen*

$$p_M : M \times N \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x,$$

und

$$p_N : M \times N \longrightarrow N,\ (x, y) \longmapsto y,$$

sind differenzierbare Abbildungen.

(2) *Der Tangentialraum in einem Punkt $R = (P, Q)$ ist $T_R(M \times N) = T_PM \times T_QN$.*

(3) *Es sei L eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist eine Abbildung*

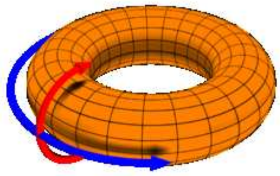
$$\varphi \times \psi : L \longrightarrow M \times N,\ u \longmapsto (\varphi(u), \psi(u)),$$

genau dann differenzierbar, wenn die Komponentenabbildungen φ und ψ differenzierbar sind.

Beweis. (1). Durch Übergang zu Karten können wir annehmen, dass M und N offene Teilmengen im $\mathbb{R}^m$ bzw. im $\mathbb{R}^n$ sind. In diesem Fall handelt es sich um eine Einschränkung der linearen Projektion $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die nach Proposition 44.3 stetig differenzierbar ist. (2). Auch hier kann man zu Karten übergehen und annehmen, dass $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen sind. Für einen Punkt (P, Q) ist dann

$$T_{(P,Q)}(M \times N) = \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = T_PM \times T_QN.$$

(3). Für einen fixierten Punkt $A \in L$ kann man unter Verwendung von Kartenumgebungen von A und von $\varphi(A)$ und $\psi(A)$ sich darauf zurückziehen, dass alle drei Mannigfaltigkeiten offene Mengen in euklidischen Räumen sind, und dass M und N reelle Vektorräume sind. Wenn beide Abbildungen stetig differenzierbar sind, so folgt nach Aufgabe 44.7 die stetige (!) Differenzierbarkeit der Gesamtabbildung. Die Umkehrung ist klar. $\square$



Beispiel 80.3. Das Produkt der Kreislinie mit sich selbst, also $M = S^1 \times S^1$, heißt *Torus*. Dies ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Da $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, lässt sich der Torus als abgeschlossenene Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ realisieren. Sie lässt sich aber auch als abgeschlossenene Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ realisieren. Dazu seien r und R positive reelle Zahlen mit $0 < r < R$. Dann ist die Menge

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

ein Torus. Es handelt sich bei dieser Realisierung um die Oberfläche eines (aufgeblasenen) „Fahrradschlauches“, dessen „Radradius“ gleich R und dessen „Schlauchradius“ gleich r ist (das Rad liegt in der $x-y$-Ebene). Der Zusammenhang mit dem Produkt $S^1 \times S^1$ ergibt sich, indem man dem Produktwinkel (φ, ψ) den Punkt $((R + r \cos \psi) \cos \varphi, (R + r \cos \psi) \sin \varphi, r \sin \psi)$ zuordnet.

Das Dachprodukt

Unsere Zielsetzung für die folgenden Wochen ist es, eine sinnvolle Volumentheorie auf Mannigfaltigkeiten zu entwickeln. Was ist beispielsweise der Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche wie der Oberfläche einer Kugel? Jeder Tangentialraum in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit ist ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und besitzt daher Borel-Lebesgue-Maße, die allerdings nur bis auf die Multiplikation mit einem Skalar wohlbestimmt sind. Für eine sinnvolle Maßtheorie müssen diese Maße in einer kontrollierbaren Weise von den Punkten der Mannigfaltigkeit abhängen. Dies kann man am besten mit Differentialformen erreichen, die wir schon erwähnt haben und bald studieren werden.

Ihre Konstruktion erleichtert sich wesentlich durch die sogenannten Dachprodukte eines Vektorraumes. Dachprodukte hängen stark mit Determinanten und allgemeiner mit multilinearen alternierenden Formen zusammen. Für die Existenz der Dachprodukte brauchen wir Restklassenräume. Diese beruhen auf einer fundamentalen algebraischen Konstruktion, für die wir auf einen Anhang verweisen.

Wir erinnern an multilineare und alternierende Abbildungen.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\triangle : V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Man nennt $\triangle$ *multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ die induzierte Abbildung

$$V \longrightarrow K,\, u \longmapsto \triangle(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

linear ist.

Eine multilineare Abbildung $\triangle$ heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist $\triangle(v) = 0$.

Das wichtigste Beispiel ist die Determinante, die eng mit der Volumenmessung zusammenhängt. Für die Maßthorie auf Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Konzept, dass für jeden Punkt eine infinitesimale Volumenform beschreibt, und dafür braucht man in jedem Tangentialraum eine Determinante. Da es allerdings keine Einheitswürfel in den Tangentialräumen gibt, wird es keine eindeutig bestimmte Determinantenfunktion geben, sondern verschiedene Determinantenfunktionen, die sich punktweise um einen Skalar unterscheiden. Ferner möchten wir nicht nur volldimensionalen Objekten ein Volumen zuordnen, sondern auch kleinerdimensionalen Objekten, wofür wir alternierende Formen von kleinerem Grad brauchen. Hier entwickeln wir die dazu benötigte lineare Algebra.

Konstruktion 80.4. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren das sogenannte n-te *Dachprodukt* von V mit sich selbst, geschrieben $\bigwedge^n V$. Dazu betrachten wir alle Symbole der Form

$$e_{(v_1, \ldots, v_n)} \text{ mit } v_i \in V\,.$$

Diese Symbolmenge, die in Bijektion zu V^n steht, bezeichnen wir mit S. Wir betrachten den Vektorraum

$$H = K^{(S)}\,,$$

das ist die Menge aller (endlichen) Summen

$$a_1 s_1 + \ldots + a_k s_k \text{ mit } a_i \in K \text{ und } s_i \in S\,.$$

Dies ist mit der natürlichen Addition und der natürlichen Skalarmultiplikation ein Vektorraum, und zwar ein Untervektorraum des Abbildungsraumes $\operatorname{Abb}(S, K)$ (es handelt sich bei H um die Menge derjenigen Vektoren, die für fast alle Elemente $s \in S$ den Wert 0 haben). In H betrachten wir den

Untervektorraum U, der von den folgenden Elementen erzeugt wird (die man die *Standardrelationen* des Dachprodukts nennt).

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v+w,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)}$$

für beliebige $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n,v,w \in V$.

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},av,v_{i+1},\ldots,v_n)} - ae_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_n)}$$

für beliebige $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n,v \in V$ und $a \in K$.

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v,v_{j+1},\ldots,v_n)}$$

für $i < j$ und beliebige $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n,v \in V$.

Dabei ist der Leitgedanke, die Regeln, die für eine alternierende multilineare Abbildung gelten müssen, dadurch zu erzwingen, dass man die obigen Relationen zu 0 macht. Der erste Typ repräsentiert die Additivität in jedem Argument, die zweite die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation, die dritte die alternierende Eigenschaft.

Man setzt nun

$$\bigwedge^n V := H/U\,,$$

d.h. man bildet den Restklassenraum von H modulo dem Unterraum U.

Die Elemente $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ bilden dabei ein Erzeugendensystem von H. Die Restklasse von $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ modulo U bezeichnen wir mit[1]

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n\,.$$

Die Standardrelationen werden dann zu den Rechenregeln[2]

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge (v+w) \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \\ = \ & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \ + \ v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge av \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \\ = \ & a \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \end{aligned}$$

und

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_{j-1} \wedge w \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_n \ = \ 0.$$

[1] Es ist nicht einfach, sich unter den Ausdrücken $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ bzw. $\wedge$ etwas vorzustellen. Wichtiger als die „Bedeutung“ dieser Symbole ist ihr Transformationsverhalten und die Rechenregeln, die dafür gelten. Erst der operative Umgang mit diesen Symbolen lässt die Bedeutung entstehen. Wenn man aber eine ungefähre Vorstellung haben möchte, so kann man sagen, dass $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ das von den Vektoren $v_1,\ldots,v_n$ erzeugte „orientierte“ Parallelotop in V repräsentiert. Das Dachprodukt $\bigwedge^n V$ besteht dann aus Linearkombinationen von solchen Parallelotopen.

[2] Es gilt die Klammerungskonvention „Dachprodukt vor Punktrechnung“, d.h. der Ausdruck $av_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ ist als $a(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$ zu lesen. Es gelten aber ohnehin die Gleichheiten

$$a(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \ = \ (av_1) \wedge \ldots \wedge v_n \ = \ v_1 \wedge \ldots \wedge (av_n).$$

Definition 80.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Man nennt den (in Konstruktion 80.4 konstruierten) K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ die n-te *äußere Potenz* (oder das n-te *Dachprodukt*) von V. Die Abbildung

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

nennt man die *universelle alternierende Abbildung.*

Lemma 80.6. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten für die äußeren Potenzen folgende Aussagen.*

(1) *Die Elemente der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ mit $v_i \in V$ bilden ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n V$.*
(2) *Die Abbildung*

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

ist multilinear und alternierend.
(3) *Es ist*

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge w \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n \\ = \ & -v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n. \end{aligned}$$

(4) *Seien $u_1, \ldots, u_m \in V$ gegeben und seien $v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist*

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \\ = & \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n} \left(\prod_{j=1}^n a_{i_j j}\right) u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_n} \end{aligned}$$

Beweis. (1) folgt direkt aus der Konstruktion. (2). Es liegt die zusammengesetzte Abbildung

$$V^n \longrightarrow H \cong K^{(V^n)} \longrightarrow H/U$$

vor, wobei $(v_1, \ldots, v_n)$ auf $e_{(v_1, \ldots, v_n)}$ und dies auf die Restklasse $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$abgebildet wird. Dabei sichert die Definition des Unterraums U, dass jeweils die Eigenschaften einer multilinearen alternierenden Abbildung erfüllt sind. (3) gilt für jede alternierende Abbildung. (4) gilt für jede multilineare Abbildung. □

Korollar 80.7. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren in V, die miteinander in der Beziehung*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

stehen, wobei M eine $n \times n$-Matrix bezeichnet. Dann gilt in $\bigwedge^n V$ die Beziehung

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = (\det M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Beweis. Nach Lemma 80.6 (4) gilt

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \; = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,n\}^n} (\prod_{j=1}^{n} a_{i_j j}) v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}.$$

Dabei wird über alle Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ aufsummiert, da der Summand gleich 0 ist, sobald sich ein Index wiederholt. Für eine Permutation σ mit $\sigma(j) = i_j$ gilt nach Lemma 80.6 (3)

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \; = \; \operatorname{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Daher folgt die Aussage aus der Leibniz-Formel für die Determinante. □

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Toroidal coord.png, Autor = Benutzer Dave Burke auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2