Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 42

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 42.1. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 42.2. Berechne zum Vektorfeld

$$F\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x \sin t - \sin t \\ \frac{y}{t} + t^5 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 42.1 das transformierte Vektorfeld zur durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung φ. Bestimme die Lösungen zu diesem transformierten Vektorfeld.

Aufgabe 42.3. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 42.4. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 42.5. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 42.6. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 42.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \colon \, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t) f_{22}(t) - f_{21}(t) f_{12}(t) \, \neq \, 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}' f_{22} - f_{12}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{11}' f_{12} + f_{12}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \\ \frac{f_{21}' f_{22} - f_{22}' f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} & \frac{-f_{12} f_{21}' + f_{22}' f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 42.8. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 42.9. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 42.10. (8 (2+6) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

a) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.

b) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 42.11. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 42.7.

Aufgabe 42.12. (4 Punkte)

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2-1 & t^3+t+2 \\ t+3 & t^2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2} y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 42.13. (5 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*[1]

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

[1] Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n-te Ableitung.