Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 29

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass eine ebene projektive Kurve mit jeder projektiven Geraden in der projektiven Ebene einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Aufgabe 29.2.*

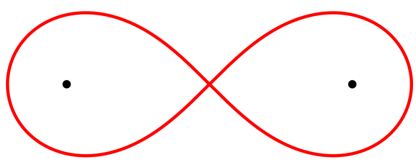
Sei $K = \mathbb{Z}/(5)$ und betrachte die beiden affinen ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } D = V(X^3 - 2Y^2 + 3)\,.$$

Bestimme den Durchschnitt $C \cap D$. Bestimme ferner die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf dem projektiven Abschluss $\bar{C}$ bzw. $\bar{D}$). Wenn man K durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subset L$ ersetzt, wie viele Punkte besitzt dann der Durchschnitt $\bar{C} \cap \bar{D}$ und wie viele davon liegen auf der unendlich fernen Geraden?

Aufgabe 29.3.*

Sei K ein Körper. Zeige, dass sämtliche lokale Ringe der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ isomorph zueinander sind. Man gebe eine möglichst einfache Beschreibung dieses Ringes.



Die Lemniskate von Bernoulli

Aufgabe 29.4. Bestimme für die durch $V((X^2 + Y^2)^2 - X^2 + Y^2)$ gegebene Lemniskate von Bernoulli die Singularitäten sowie die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Berechne in all diesen Punkten die Multiplizität und die Tangenten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.5. (3 Punkte)

Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

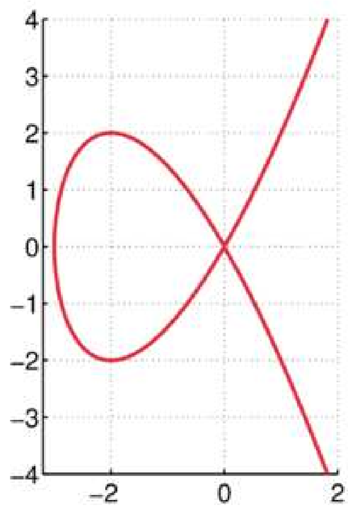
Aufgabe 29.6. (3 Punkte)

Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass die Projektion des $\mathbb{P}^n_K$ auf $\mathbb{P}^{n-1}_K$ mit Zentrum P durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$



Die Tschirnhausen Kubik

Aufgabe 29.7. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V(X^3 + 3X^2 - Y^2)$ gegebene *Tschirnhausen Kubik* die Singularitäten unter Berücksichtigung der unendlich fernen Punkte. Bestimme die Tangenten in den Singularitäten und in den unendlich fernen Punkten.

Aufgabe 29.8. (3 Punkte)

Bestimme für das durch $V(X^3 + Y^3 - 3XY)$ definierte Kartesische Blatt die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und berechne die Multiplizität und die Tangenten in diesen Punkten.

Aufgabe 29.9. (5 Punkte)

Man gebe für die projektive Lemniskate von Bernoulli

$$V_+((X^2 + Y^2)^2 - Z^2X^2 + Z^2Y^2) \subset \mathbb{P}^2_K$$

einen surjektiven Morphismus auf eine projektive Quadrik an. Wie viele Punkte der Lemniskate werden dabei auf einen Punkt der Quadrik abgebildet?