

# Mathematik für Anwender I

## Vorlesung 12



Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

### Reelle Zahlenfolgen

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

BEISPIEL 12.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl  $x$  mit der Eigenschaft  $x^2 = 5$  gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn  $x \in \mathbb{R}$  ein solches Element ist, so hat auch  $-x$  diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Korollar 4.11 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung  $x^2 = 5$  gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzeln beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit  $a := x_0 := 2$  als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist  $x_0$  zu klein, d.h. es ist  $x_0 < x$ . Aus  $a^2 < 5$  (mit  $a$  positiv) folgt zunächst  $5/a^2 > 1$  und daraus  $(5/a)^2 > 5$ , d.h.  $5/a > \sqrt{5}$ . Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo  $\sqrt{5}$  liegt. Die Differenz  $5/a - a$  ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von  $\sqrt{5}$  zwischen 2 und  $5/2$  liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen  $(\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} > 5$  ist dieser Wert zu groß und daher liegt  $\sqrt{5}$  im Intervall  $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$ . Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von  $\sqrt{5}$ .

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

BEISPIEL 12.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von  $\sqrt{c}$  einer positiven Zahl  $c$  geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert  $x_0$  und berechnet davon das arithmetische Mittel aus  $x_0$  und  $c/x_0$ . Dieses Mittel nennt man  $x_1$ . Es gilt

$$x_1^2 - c = \left( \frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2} \right)^2 - c = \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c = \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} = \left( \frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2} \right)^2.$$

D.h. dass  $x_1$  mindestens so groß wie  $\sqrt{c}$  ist. Auf  $x_1$  wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so  $x_2$  usw. Die Definition von  $x_{n+1}$  lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}.$$

Nach Konstruktion weiß man, dass  $\sqrt{c}$  in jedem Intervall  $[c/x_n, x_n]$  (für  $n \geq 1$ ) liegt, da aus  $x_n^2 \geq c$  und  $x_n \cdot c/x_n = c$  folgt, dass  $(\frac{c}{x_n})^2 \leq c$  ist. Bei jedem Schritt gilt

$$\left[ \frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1} \right] \subseteq \left[ \frac{c}{x_n}, x_n \right],$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

DEFINITION 12.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , oder einfach nur kurz als  $(x_n)_n$  geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen  $\geq N$ . Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur“, wie sie in  $\mathbb{R}$  existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

DEFINITION 12.4. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge und es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

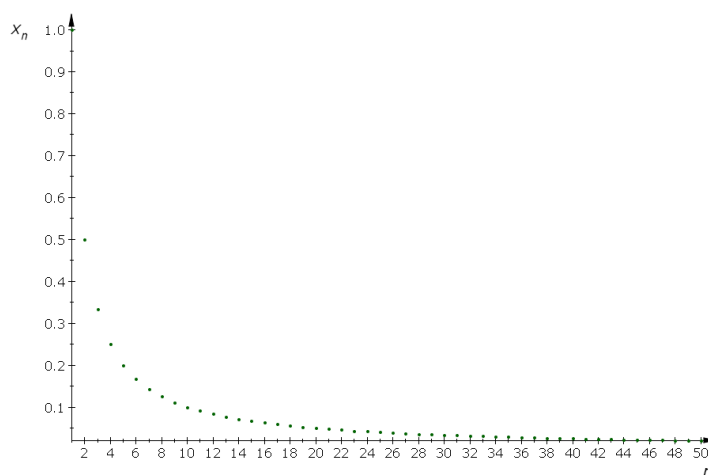
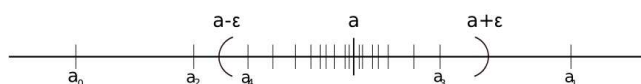
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene  $\epsilon$  als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl  $n_0$  ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab  $n_0$  folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist

im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen  $\epsilon$  kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen  $\frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , arbeiten, siehe Aufgabe 12.3.

Zu einem  $\epsilon > 0$  und einer reellen Zahl  $x$  nennt man das Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  auch die  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$ . Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



BEISPIEL 12.5. Eine *konstante Folge*  $x_n := c$  ist stets konvergent mit dem Grenzwert  $c$ . Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes  $\epsilon > 0$  als Aufwandszahl  $n_0 = 0$  nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle  $n$ .

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives  $\epsilon$  vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein  $n_0$  mit  $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ . Insgesamt gilt damit für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung

$$x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

LEMMA 12.6. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

*Beweis.* Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte  $x, y$ ,  $x \neq y$ , gibt. Dann ist  $d := |x - y| > 0$ . Wir betrachten  $\epsilon := d/3 > 0$ . Wegen der Konvergenz gegen  $x$  gibt es ein  $n_0$  mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ f\u00fcr alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen  $y$  gibt es ein  $n'_0$  mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ f\u00fcr alle } n \geq n'_0.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleicherma\u00dfen f\u00fcr  $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ . Sei  $n$  mindestens so gro\u00df wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□

## Beschr\u00e4nktheit

DEFINITION 12.7. Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen.

- (1) Ein Element  $S \in \mathbb{R}$  hei\u00dft eine *obere Schranke* f\u00fcr  $M$ , wenn  $x \leq S$  gilt f\u00fcr alle  $x \in M$ .
- (2) Ein Element  $s \in \mathbb{R}$  hei\u00dft eine *untere Schranke* f\u00fcr  $M$ , wenn  $x \geq s$  gilt f\u00fcr alle  $x \in M$ .
- (3)  $M$  hei\u00dft *nach oben beschr\u00e4nkt*, wenn eine obere Schranke f\u00fcr  $M$  existiert.
- (4)  $M$  hei\u00dft *nach unten beschr\u00e4nkt*, wenn eine untere Schranke f\u00fcr  $M$  existiert.
- (5)  $M$  hei\u00dft *beschr\u00e4nkt*, wenn  $M$  sowohl nach oben als auch nach unten beschr\u00e4nkt ist.
- (6) Eine obere Schranke  $T$  von  $M$  hei\u00dft das *Supremum* von  $M$ , wenn  $T \leq S$  f\u00fcr alle oberen Schranken  $S$  von  $M$  gilt.
- (7) Eine untere Schranke  $t$  von  $M$  hei\u00dft das *Infimum* von  $M$ , wenn  $t \geq s$  f\u00fcr alle unteren Schranken  $s$  von  $M$  gilt.
- (8) Das Supremum  $T$  von  $M$  hei\u00dft *Maximum*, wenn  $T \in M$  ist.
- (9) Das Infimum  $t$  von  $M$  hei\u00dft *Minimum*, wenn  $t \in M$  ist.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn  $S$  eine obere Schranke ist, so ist auch jede gr\u00f6\u00dfere Zahl eine obere Schranke. F\u00fcr das offene Intervall  $]0, 1[$  ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu geh\u00f6rt. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch f\u00fcr Folgen angewendet, und zwar f\u00fcr die Bildmenge  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ . F\u00fcr die Folge  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

LEMMA 12.8. *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

*Beweis.* Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die konvergente Folge mit dem Limes  $x \in \mathbb{R}$  und es sei  $\epsilon > 0$ . Aufgrund der Konvergenz gibt es ein  $n_0$  derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Unterhalb von  $n_0$  gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n < n_0} \{|x_n|, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Dies ist eine Schranke für alle  $|x_n|$ . □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

BEISPIEL 12.9. Es sei  $c > 0$  eine positive reelle Zahl. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n := (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| = |(-1)^n| |c| = c.$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich  $x \geq 0$  der Grenzwert, so gilt für positives  $\epsilon < c$  und jedes ungerade  $n$  die Beziehung

$$|x_n - x| = |-c - x| = c + x \geq c > \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser  $\epsilon$ -Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

## Rechenregeln für Folgen

LEMMA 12.10. *Es seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

(2) *Die Folge  $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

(3) *Für  $c \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

- (4) Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$  und  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

- (5) Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$  und  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

*Beweis.* Wir beweisen nur (2) und (4), die anderen Teile sind als Übungen zu beweisen. (2). Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein  $D$  mit  $|x_n| \leq D$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Wir setzen  $C = \max\{D, |y|, 1\}$ . Daher gibt es natürliche Zahlen  $N_1$  und  $N_2$  mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für  $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ . Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\ &\leq C \frac{\epsilon}{2C} + C \frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht null ist, gilt für  $n \geq N_1$  die Bedingung  $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$  und damit  $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$ . Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es ein  $N_2$  mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon |x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$  die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x x_n} \right| = \frac{1}{|x| |x_n|} |x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon |x|^2}{2} = \epsilon.$$

□





## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Heron von Alexandria.jpg , Autor = Benutzer Frank C. Müller auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = Konvergenz.svg , Autor = Benutzer Matthias Vogelgesang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Cauchy sequence - example.png , Autor = Benutzer Pred auf da.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5	4