Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Vorlesung 5

In dieser Vorlesung diskutieren wir Normalteiler, das sind Untergruppen, für die Links- und Rechtsnebenklassen übereinstimmen. Für Normalteiler kann man Restklassengruppen konstruieren.

Innere Automorphismen

Definition 5.1. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die durch g definierte Abbildung

$$\kappa_g : G \longrightarrow G,\, x \longmapsto gxg^{-1},$$

heißt *innerer Automorphismus.*

Eine solche Abbildung nennt man auch *Konjugation* (mit g).

Lemma 5.2. *Ein innerer Automorphismus ist in der Tat ein Automorphismus. Die Zuordnung*

$$G \longrightarrow \operatorname{Aut} G,\, g \longmapsto \kappa_g,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Es ist

$$\kappa_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \kappa_g(x)\kappa_g(y),$$

so dass ein Gruppenhomomorphismus vorliegt. Wegen

$$\kappa_g(\kappa_h(x)) = \kappa_g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = ghx(gh)^{-1} = \kappa_{gh}$$

ist einerseits

$$\kappa_{g^{-1}} \circ \kappa_g = \kappa_{g^{-1}g} = \mathrm{id}_G,$$

so dass κ_g bijektiv, also ein Automorphismus, ist. Andererseits ist deshalb die Gesamtabbildung κ ein Gruppenhomomorphismus. □

Wenn G eine kommutative Gruppe ist, so ist wegen $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$ die Identität der einzige innere Automorphismus. Der Begriff ist also nur bei nicht kommutativen Gruppen von Interesse.

Normalteiler

DEFINITION 5.3. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Man nennt H einen *Normalteiler*, wenn

$$xH = Hx$$

ist für alle $x \in G$, wenn also die Linksnebenklasse zu x mit der Rechtsnebenklasse zu x übereinstimmt.

Bei einem Normalteiler braucht man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen zu unterscheiden und spricht einfach von *Nebenklassen*. Die Gleichheit $xH = Hx$ bedeutet *nicht*, dass $xh = hx$ ist für alle $h \in H$, sondern lediglich, dass es zu jedem $h \in H$ ein $\tilde{h} \in H$ gibt mit $xh = \tilde{h}x$. Statt xH oder Hx schreiben wir meistens $[x]$.

LEMMA 5.4. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *H ist ein Normalteiler*
(2) *Es ist $xhx^{-1} \in H$ für alle $x \in G$ und $h \in H$.*
(3) *H ist invariant unter jedem inneren Automorphismus von G.*

Beweis. (1) bedeutet bei gegebenem $h \in H$, dass man $xh = \tilde{h}x$ schreiben kann mit einem $\tilde{h} \in H$. Durch Multiplikation mit x^{-1} von rechts ergibt sich $xhx^{-1} = \tilde{h} \in H$, also (2). Dieses Argument rückwärts ergibt die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1). Ferner ist (2) eine explizite Umformulierung von (3). $\square$

BEISPIEL 5.5. Wir betrachten die Permutationsgruppe $G = S_3$ zu einer dreielementigen Menge, d.h. S_3 besteht aus den bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich. Die triviale Gruppe $\{\mathrm{id}\}$ und die ganze Gruppe sind Normalteiler. Die Teilmenge $H = \{\mathrm{id}\,, \varphi\}$, wobei φ die Elemente 1 und 2 vertauscht und 3 unverändert lässt, ist eine Untergruppe. Sie ist aber kein Normalteiler. Um dies zu zeigen, sei ψ die Bijektion, die 1 fest lässt und 2 und 3 vertauscht. Dieses ψ ist zu sich selbst invers. Die Konjugation $\psi\varphi\psi^{-1} = \psi\varphi\psi$ ist dann die Abbildung, die 1 auf 3, 2 auf 2 und 3 auf 1 schickt, und diese Bijektion gehört nicht zu H.

LEMMA 5.6. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern* $\ker \varphi$ *ein Normalteiler in G.*

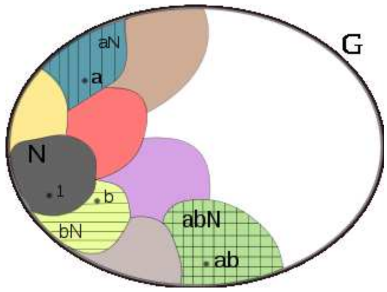
Beweis. Wir verwenden Lemma 5.4. Sei also $x \in G$ beliebig und $h \in \ker \varphi$. Dann ist

$$\varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(h)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)e_H\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e_H,$$

also gehört xhx^{-1} ebenfalls zum Kern. $\square$

Restklassenbildung

Wir zeigen nun umgekehrt, dass jeder Normalteiler sich als Kern eines geeigneten, surjektiven Gruppenhomomorphismus realisieren lässt.



Die Multiplikation der Nebenklassen zu einem Normalteiler $N \subseteq G$.

Satz 5.7. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Es sei G/H die Menge der Nebenklassen (die Quotientenmenge) und*

$$q : G \longrightarrow G/H,\ g \longmapsto [g],$$

die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gruppenstruktur auf G/H derart, dass q ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Da die kanonische Projektion zu einem Gruppenhomomorphismus werden soll, muss die Verknüpfung durch

$$[x][y] = [xy]$$

gegeben sein. Wir müssen also zeigen, dass durch diese Vorschrift eine wohldefinierte Verknüpfung auf G/H definiert ist, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. D.h. wir haben für $[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ zu zeigen, dass $[xy] = [x'y']$ ist. Nach Voraussetzung können wir $x' = xh$ und $hy' = \tilde{h}y = yh'$ schreiben mit $h, \tilde{h}, h' \in H$. Damit ist

$$x'y' = (xh)y' = x(hy') = x(yh') = xyh'.$$

Somit ist $[xy] = [x'y']$. Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf G/H folgen die Gruppeneigenschaften, die Homomorphieeigenschaft der Projektion und die Eindeutigkeit. $\square$

Definition 5.8. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Die Quotientenmenge

$$G/H$$

mit der aufgrund von Satz 5.7 eindeutig bestimmten Gruppenstruktur heißt *Restklassengruppe von G modulo H*. Die Elemente $[g] \in G/H$ heißen *Restklassen.* Für eine Restklasse $[g]$ heißt jedes Element $g' \in G$ mit $[g'] = [g]$ ein *Repräsentant* von $[g]$.

Beispiel 5.9. Die Untergruppen der ganzen Zahl sind nach Satz 3.2 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009)) von der Form $\mathbb{Z}n$ mit $n \geq 0$ (diese Aussage ist analog zu der in Vorlesung 3 bewiesenen Aussage, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist). Die Restklassengruppen werden mit

$$\mathbb{Z}/(n)$$

bezeichnet (sprich „$\mathbb{Z}$ modulo n“). Bei $n = 0$ ist das einfach $\mathbb{Z}$ selbst, bei $n = 1$ ist das die triviale Gruppe. Im Allgemeinen ist die durch die Untergruppe $\mathbb{Z}n$ definierte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ dadurch gegeben, dass zwei ganze Zahlen a und b genau dann äquivalent sind, wenn ihre Differenz $a - b$ zu $\mathbb{Z}n$ gehört, also ein Vielfaches von n ist. Daher ist (bei $n \geq 1$) jede ganze Zahl zu genau einer der n Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

äquivalent (oder, wie man auch sagt, *kongruent modulo* n), nämlich zum Rest, der sich bei Division durch n ergibt. Diese Reste bilden also ein Repräsentantensystem für die Restklassengruppe, und diese besitzt n Elemente. Die Tatsache, dass die Restklassenabbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n),\ a \longmapsto [a] = a \mod n,$$

ein Homomorphismus ist, kann man auch so ausdrücken, dass der Rest einer Summe von zwei ganzen Zahlen nur von den beiden Resten, nicht aber von den Zahlen selbst, abhängt.[1] Als Bild der zyklischen Gruppe[2] $\mathbb{Z}$ ist auch $\mathbb{Z}/(n)$ zyklisch, und zwar ist 1 (aber auch -1) stets ein Erzeuger.

Die Homomorphiesätze für Gruppen

Satz 5.10. *Seien G, Q und H Gruppen, es sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $\psi : G \to Q$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

ist. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : Q \longrightarrow H$$

derart, dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Q \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H \end{array}$$

ist kommutativ.

---

[1] Dies gilt auch für das Produkt von zwei Zahlen, was bedeutet, dass diese Abbildung ein Ringhomomorphismus ist.

[2] Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn sie von einem Element erzeugt wird.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Für jedes Element $u \in Q$ gibt es mindestens ein $g \in G$ mit $\psi(g) = u$. Wegen der Kommutativität des Diagramms muss

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(g)$$

gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein $\tilde{\varphi}$ geben kann. Wir haben zu zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Seien also $g, g' \in G$ zwei Urbilder von u. Dann ist

$$g' g^{-1} \in \text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

und daher ist $\varphi(g) = \varphi(g')$. Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien $u, v \in Q$ und seien $g, h \in G$ Urbilder davon. Dann ist gh ein Urbild von uv und daher ist

$$\tilde{\varphi}(uv) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \tilde{\varphi}(u)\tilde{\varphi}(v).$$

D.h. φ ist ein Gruppenhomomorphismus. □

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung heißt *induzierte Abbildung* oder *induzierter Homomorphismus* und entsprechend heißt der Satz auch *Satz vom induzierten Homomorphismus.*

KOROLLAR 5.11. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$\tilde{\varphi} : G/ \text{kern } \varphi \longrightarrow H.$$

Beweis. Wir wenden Satz 5.10 auf $Q = G/ \text{kern } \varphi$ und die kanonische Projektion $q : G \to G/ \text{kern } \varphi$ an. Dies induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : G/ \text{kern } \varphi \longrightarrow H$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$, der surjektiv ist. Sei $[x] \in G/ \text{kern } \varphi$ und $[x] \in \text{kern } \tilde{\varphi}$. Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x) = e_H,$$

also $x \in \text{kern } \varphi$. Damit ist $[x] = \{e_Q\}$, d.h. der Kern von $\tilde{\varphi}$ ist trivial und nach Lemma 4.9 ist $\tilde{\varphi}$ auch injektiv. □

SATZ 5.12. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung*

$$G \xrightarrow{q} G/ \text{kern } \varphi \xrightarrow{\theta} \text{bild } \varphi \xhookrightarrow{\iota} H\,,$$

wobei q die kanonische Projektion, θ ein Gruppenisomorphismus und ι die kanonische Inklusion der Bildgruppe ist.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 5.10 angewandt auf die Bildgruppe $U = \text{bild } \varphi \subseteq H$. □

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

Bild = *Urbild modulo Kern.*

Satz 5.13. *Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler mit der Restklassengruppe $Q = G/N$. Es sei $H \subseteq G$ eine weiterer Normalteiler in G, der N umfasst. Dann ist das Bild $\overline{H}$ von H in Q ein Normalteiler und es gilt die kanonische Isomorphie*

$$G/H \cong Q/\overline{H}\,.$$

Beweis. Für die erste Aussage siehe Aufgabe 5.12. Damit ist die Restklassengruppe $Q/\overline{H}$ wohldefiniert. Wir betrachten die Komposition

$$q \circ \theta : G \longrightarrow Q \longrightarrow Q/\overline{H}\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \text{kern } q \circ \theta &= \{x \in G \,|\, q \circ \theta(x) = e\} \\ &= \{x \in G \,|\, \theta(x) = xN \in \text{kern } q\} \\ &= \{x \in G \,|\, xN \in \overline{H}\} \\ &= H \end{aligned}$$

ist kern $q \circ \theta = H$. Daher ergibt Korollar 5.10 die kanonische Isomorphie

$$G/H \longrightarrow Q/\overline{H}.$$

□

Kurz gesagt ist also

$$G/H = (G/N)/(H/N)\,.$$

Abbildungsverzeichnis