

Mathematik III**Arbeitsblatt 82****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 82.1. Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

AUFGABE 82.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei $V \neq 0$ aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

AUFGABE 82.3. Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis v_1, \dots, v_n . Zeige, dass wenn man einen Vektor v_i durch sein Negatives $-v_i$ ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

AUFGABE 82.4. Es seien V und W zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf V repräsentierende Basis v_1, \dots, v_n gibt, deren Bildvektoren $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ die Orientierung auf W repräsentieren.

AUFGABE 82.5. Bestimme, ob die beiden Basen des \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

AUFGABE 82.6. Es sei X ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass X kompakt ist.

AUFGABE 82.7. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

AUFGABE 82.8. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} nicht überdeckungskompakt ist.

AUFGABE 82.9. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass \mathbb{N} abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

AUFGABE 82.10. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X vollständig ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 82.11. (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von \mathbb{R}^3 und die dadurch induzierte Basis

$$\mathbf{v} = v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3$$

von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis \mathbf{v} und der Standardbasis $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$.

AUFGABE 82.12. (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

AUFGABE 82.13. (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf V , aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt

AUFGABE 82.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die 1-Sphäre S^1 eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 82.15. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

AUFGABE 82.16. (4 Punkte)

Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = DBP 1962 385 Wohlfahrt Schneewittchen.jpg, Autor = Börnsen
(= Benutzer NobbiP auf Commons), Lizenz = gemeinfrei 1