Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 4

Injektive und surjektive Abbildungen

Definition 4.1. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 4.2. Es sei $F : L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G : M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Definition 4.3. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) = G(F(x))\,,$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt

(und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 4.4. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Satz 4.5. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F : M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

Polynome

Definition 4.6. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Dabei heißen die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0. Beim *Nullpolynom* sind überhaupt alle Koeffizienten null.

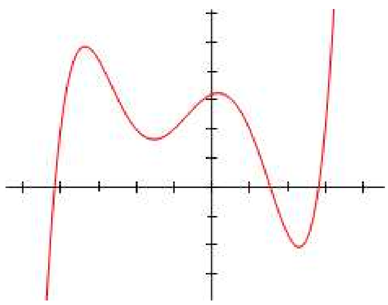
Definition 4.7. Der *Grad* eines von null verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms.

Die Gesamtheit aller Polynome über einem Körper K heißt *Polynomring* über K, er wird mit $K[X]$ bezeichnet. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings.

Zwei Polynome lassen sich auch miteinander multiplizieren, wobei man
$$X^n \cdot X^m = X^{n+m}$$
setzt und diese Multiplikationsregel „distributiv fortsetzt“, d.h. man multipliziert „alles mit allem“ und muss dann aufaddieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:
$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_jX^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_rb_{k-r}\,.$$
Für den Grad gelten die beiden folgenden Regeln

- $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$.
- $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung
$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$
die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Wenn P und Q Polynome sind, so kann man die Hintereinanderschaltung $P \circ Q$ einfach beschreiben: man muss in P überall die Variable X durch Q ersetzen (und alles ausmultiplizieren und aufaddieren). Das Ergebnis ist wieder ein Polynom. Man beachte, dass es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

Division mit Rest

SATZ 4.8. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \textit{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \textit{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \ldots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &= P - TH \\ &= 0X^n + (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1})X^{n-1} + \ldots + (a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \ldots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P \;=\; P' + TH \;=\; TQ' + TH + R' \;=\; T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

LEMMA 4.9. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms[1] $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

[1] $X - a$ heißt dann ein *Linearfaktor* des Polynoms P

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. □

Korollar 4.10. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom (ungleich null) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Fakt ***** und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann null sein, wenn einer der Faktoren null ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Korollar 4.11. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Dann besitzt jedes $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung*

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q. Dabei sind die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Es gilt allgemeiner, dass die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren im Wesentlichen eindeutig ist.

Der Fundamentalsatz der Algebra

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass jedes Polynom vom Grad 2 über den komplexen Zahlen eine Nullstelle besitzt. Allgemeiner gilt der folgende *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir hier ohne Beweis erwähnen.

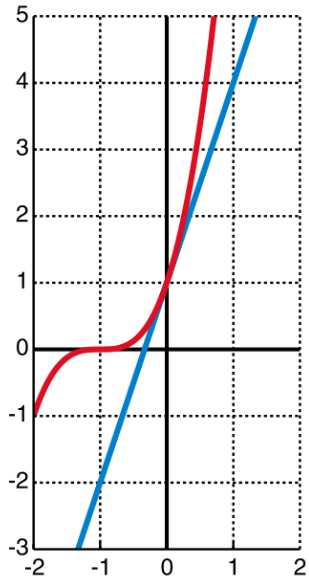
Satz 4.12. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, das jedes von 0 verschiedene Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. man kann schreiben

$$P = c(X - z_1)(X - z_2) \cdot (X - z_n)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ (wobei Wiederholungen erlaubt sind).

Bernoulli'sche Ungleichung



Die folgende Aussage heißt *Bernoulli Ungleichung*.

Satz 4.13. *Für jede reelle Zahl* $x \geq -1$ *und eine natürliche Zahl* n *gilt die Abschätzung*

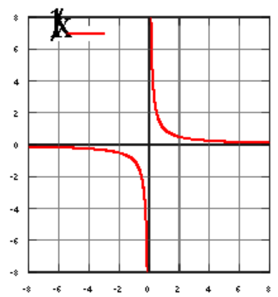
$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

$\square$

Rationale Funktionen



Man kann auch Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion $1/X$.

Definition 4.14. Zu zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion*.

Abbildungsverzeichnis