

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 14

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 14.1. Es sei  $K$  ein Körper der Charakteristik null. Wir betrachten den Schnitt von einem Zylinder und einer Kugel, und zwar

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap V((X - 3)^2 + Y^2 + Z^2 - 7) \subseteq \mathbb{A}_K^3.$$

Zeige, dass man den Koordinatenring von  $C$  als Restklassenring eines Polynomrings in zwei Variablen schreiben kann.

AUFGABE 14.2. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $e \in R$  ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$R_e \cong R/(1 - e)$$

gibt.

(Dies zeigt erneut, dass  $D(e)$  offen und abgeschlossen ist).

In den folgenden Aufgaben werden Ultrafilter und minimale Primideale besprochen. Wir geben die Definition.

Ein Primideal  $\mathfrak{p}$  in einem kommutativen Ring heißt *minimales Primideal*, wenn es kein Primideal  $\mathfrak{q}$  mit  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$  gibt.

Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System  $F \subseteq R$  nennt man einen *Ultrafilter*, wenn  $0 \notin F$  ist und wenn  $F$  maximal mit dieser Eigenschaft ist.

AUFGABE 14.3. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $F \subseteq R$  ein multiplikatives System mit  $0 \notin F$ . Zeige, dass  $F$  genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem  $g \in R$ ,  $g \notin F$ , ein  $f \in F$  und eine natürliche Zahl  $n$  gibt mit  $fg^n = 0$ .

AUFGABE 14.4. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $F \subseteq R$  ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von  $F$  ein minimales Primideal in  $R$  ist.

AUFGABE 14.5. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $S$  ein multiplikatives System mit  $0 \notin S$ . Zeige, dass  $S$  in einem Ultrafilter enthalten ist.

(Man benutze das Lemma von Zorn).

AUFGABE 14.6. Sei  $R$  ein kommutativer, reduzierter Ring. Zeige, dass jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal enthalten ist.

AUFGABE 14.7. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die minimalen Primideale von  $R$  den irreduziblen Komponenten von  $K\text{-Spek}(R)$  entsprechen.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 14.8. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene  $\mathbb{A}_K^2$ . Es sei  $P \in \mathbb{A}_K^2$  ein Punkt und  $U = \mathbb{A}_K^2 \setminus \{P\}$  das offene Komplement davon. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K[X, Y].$$

(Dies besagt, dass eine außerhalb eines Punktes definierte algebraische Funktion sich in den Punkt fortsetzen lässt. In der komplexen Analysis nennt man den entsprechenden Satz den *Riemannschen Hebbarkeitssatz*).

AUFGABE 14.9. (4 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $M_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , seien  $R$ -Moduln mit fixierten  $R$ -Modulhomomorphismen

$$\varphi_i: M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\dots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \dots$$

heißt *exakt*, wenn für alle  $i$  gilt, dass  $\text{Kern}(\varphi_i) = \text{Bild}(\varphi_{i-1})$  ist.

- (1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition in der Vorlesung übereinstimmt.
- (2) Sei nun  $R = K$  ein Körper, die  $M_i$  seien endlich erzeugt,  $M_0 = 0$  und alle  $M_i = 0$  für  $i \geq n$  für ein gewisses  $n$ . Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_K M_i = 0.$$

## AUFGABE 14.10. (6 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

- (1)  $R$  ist reduziert.
- (2) Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  ist  $R_{\mathfrak{p}}$  reduziert.
- (3) Für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  ist  $R_{\mathfrak{m}}$  reduziert.

Bemerkung: Man sagt daher, dass Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist.

Man gebe auch ein Beispiel für einen kommutativen Ring, der nicht integer ist, dessen Lokalisierungen an Primidealen aber alle integer sind.

## AUFGABE 14.11. (6 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und  $A$  eine endlichdimensionale, reduzierte  $K$ -Algebra. Zeige, dass dann  $A$  ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von  $K$  ist.

Hinweis: Man darf ohne Beweis benutzen, dass es in  $A$  nur endlich viele Primideale gibt.

## AUFGABE 14.12. (5 Punkte)

Beschreibe die Menge  $M$  aller  $2 \times 3$ -Matritzen mit  $\text{Rang} \leq 1$  über einem Körper  $K$  als  $K$ -Spektrum einer geeigneten  $K$ -Algebra. Zeige, dass es eine Isomorphie zwischen einer (nicht leeren) Zariski-offenen Teilmenge von  $M$  und einer offenen Menge des  $\mathbb{A}_K^4$  gibt.

## AUFGABE 14.13. (5 Punkte)

Betrachte das Ideal

$$\mathfrak{a} = (U^5 - V^3, U^{11} - W^3, V^{11} - W^5) \subseteq K[U, V, W]$$

und das zugehörige Nullstellengebilde  $Z = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^3$ . Zeige, dass  $W - U^2V$  zum Radikal von  $\mathfrak{a}$  gehört. Zeige damit, dass  $Z$  isomorph zu einer ebenen algebraischen Kurve ist.

Man benutze, dass das Radikal der Durchschnitt der Primideale ist, die es umfassen.