

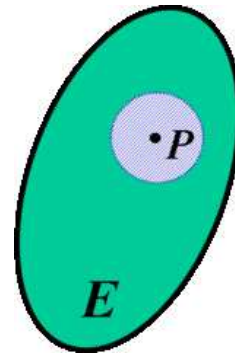
## Mathematik III

### Vorlesung 89

#### Partitionen der Eins

Wir besprechen nun eine wichtige analytische Hilfstechnik namens *Partition der Eins*. Wir werden sie im Beweis für die Aussage, dass orientierbare Mannigfaltigkeiten eine positive Volumenform besitzen, und für den Beweis des Satzes von Stokes einsetzen. In dieser Vorlesung werden wir Partitionen der Eins konstruieren, wozu wir zunächst einige topologische Begriffe benötigen.

Das offene Innere ist die Vereinigung aller inneren Punkte, also derjenigen Punkte von  $T$  (im Bild  $E$ ), die mit einer ganzen offenen Umgebung in  $T$  enthalten sind.



DEFINITION 89.1. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T \subseteq X$  eine Teilmenge. Dann heißt

$$T^\circ = \bigcup_{U \text{ offen, } U \subseteq T} U$$

das *offene Innere* (oder *Innere*) von  $T$ .

DEFINITION 89.2. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $T \subseteq X$  eine Teilmenge. Dann heißt

$$\bar{T} = \bigcap_{A \text{ abgeschlossen, } T \subseteq A} A$$

der *Abschluss* (oder *topologische Abschluss*) von  $T$ .

Diese beiden Begriffe stehen durch

$$\bar{T} = X \setminus (X \setminus T)^\circ$$

miteinander in Beziehung.

DEFINITION 89.3. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt der topologische Abschluss

$$\overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von  $f$ .

DEFINITION 89.4. Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *kompakte Ausschöpfung*  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von  $X$  ist eine Folge von kompakten Teilmengen  $A_n \subseteq X$  mit

$$A_n \subseteq A_{n+1}^o \text{ und } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X.$$

LEMMA 89.5. *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann besitzt  $M$  eine kompakte Ausschöpfung.*

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $P \in M$  gibt es eine offene Kartenumgebung  $P \in U$ ,

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

sowie Ballumgebungen

$$U(\alpha(P), \epsilon) \subseteq B(\alpha(P), \epsilon) \subset V.$$

Wegen der Homöomorphie der Kartenabbildung und der Kompaktheit der abgeschlossenen Bälle ist  $B_P = \alpha^{-1}(B(\alpha(P), \epsilon))$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , die die offene Umgebung  $U_P = \alpha^{-1}(U(\alpha(P), \epsilon))$  von  $P$  umfasst. Die  $U_P$ ,  $P \in M$ , bilden eine offene Überdeckung von  $M$ , so dass es nach Aufgabe 63.4 eine abzählbare Teilüberdeckung gibt. Diese sei mit  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bezeichnet (wobei die  $U_n$  in den kompakten Teilmengen  $B_n$  liegen). Wir definieren nun rekursiv eine monoton wachsende Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, k \longmapsto n_k,$$

derart, dass

$$A_k = \bigcup_{n=0}^{n_k} B_n, k \in \mathbb{N},$$

eine kompakte Ausschöpfung von  $M$  ist. Als eine endliche Vereinigung von kompakten Mengen sind diese  $A_k$  kompakt. Wir beginnen mit  $n_0 = 0$ . Sei  $n_k$  schon konstruiert. Die Menge

$$A_k \cup B_{n_{k+1}}$$

ist kompakt und wird daher von endlich vielen offenen Mengen  $\bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n$  überdeckt, wobei wir  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  wählen. Mit dieser Wahl ist

$$A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} U_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} B_n = A_{k+1},$$

und diese Folge bildet eine Ausschöpfung, da die  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Überdeckung bilden.  $\square$

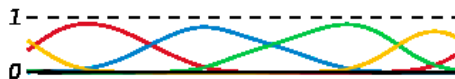
DEFINITION 89.6. Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X = \bigcup_{i \in I} W_i$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Eine Familie von Funktionen

$$h_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $j \in J$  heißt eine *der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins*, wenn folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Es ist  $h_j(X) \subseteq [0, 1]$  für alle  $j \in J$ .
- (2) Jeder Punkt  $P \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $P \in U$  derart, dass die eingeschränkten Funktionen  $h_j|_U$  bis auf endlich viele Ausnahmen die Nullfunktion sind.
- (3) Es ist  $\sum_{j \in J} h_j = 1$ .
- (4) Für jedes  $j \in J$  gibt es eine offene Menge  $W_{i(j)}$  aus der Überdeckung derart, dass der Träger von  $h_j$  in  $W_{i(j)}$  liegt.

Wenn alle  $h_j$  stetig sind, so spricht man von einer *stetigen Partition der Eins*.



Die ersten drei Eigenschaften sind die Partitionseigenschaften, die vierte Eigenschaft bedeutet, dass die Partition der Überdeckung untergeordnet ist. Die zweite Eigenschaft sichert dabei, dass die Summe in (3) definiert ist, da für jeden Punkt  $P \in X$  und fast alle  $j \in J$  die Gleichheit  $h_j(P) = 0$  gilt.

Bei einer Mannigfaltigkeit nennt man eine solche Partition *differenzierbar*, wenn alle  $h_j$  differenzierbare Funktionen sind.

LEMMA 89.7. *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Es sei  $M = \bigcup_{i \in I} W_i$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann gibt es einen abzählbaren verträglichen Atlas  $(U_j, \alpha_j, V_j)$ ,  $j \in J$ , mit Ballumgebungen*

$$U(0, \delta_j) \subset B(0, \epsilon_j) \subset V_j$$

(dabei ist  $0 \in V_j \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\delta_j < \epsilon_j$ ) derart, dass es für jedes  $j \in J$  ein  $W_{i(j)}$  gibt mit  $U_j \subseteq W_{i(j)}$ , dass  $M$  von  $\alpha_j^{-1}(U(0, \delta_j))$ ,  $j \in J$ , überdeckt wird und dass jeder Punkt  $P \in M$  nur in endlich vielen der Mengen  $U_j$  liegt.

*Beweis.* Es sei die offene Überdeckung  $W_i$ ,  $i \in I$ , gegeben. Ferner sei  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine kompakte Ausschöpfung von  $M$ , die es nach Lemma 89.5 gibt. Die offenen Mengen  $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$  bilden ebenfalls eine offene Überdeckung, da es zu jedem Punkt  $P \in M$  ein minimales  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $P \in A_n$  (es sei  $A_{-1} = \emptyset$ ). Indem wir die Durchschnitte  $W_i \cap (A_{n+1}^o \setminus A_{n-1})$  betrachten, können wir annehmen, dass alle Mengen der Überdeckung innerhalb von einem  $A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$  liegen. Zu jedem Punkt  $P \in M$  gibt es eine offene (verträgliche) Kartenumgebung  $P \in U_P$ , die in einem der  $W_i$  liegt und für die es Ballumgebungen

$$U(0, \delta_P) \subset B(0, \epsilon_P) \subset V_P$$

gibt mit  $P \in \alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P))$  und  $\delta_P < \epsilon_P$ . Diese  $\alpha_P^{-1}(U(0, \delta_P))$ ,  $P \in M$ , bilden dann ebenfalls eine offene Überdeckung von  $M$ . Nach Aufgabe 63.4 können wir zu einer abzählbaren Teilüberdeckung davon übergehen. Wir können also

annehmen, dass ein System von Karten  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zusammen mit Ballumgebungen

$$U(0, \delta_n) \subset B(0, \epsilon_n) \subset V_n$$

derart gegeben ist, dass auch  $\alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine offene Überdeckung ist, dass jedes  $U_n$  in einem  $W_{i(n)}$  liegt und dass die oben beschriebene Beziehung zu der kompakten Ausschöpfung gilt. Wir werden eine Teilmenge  $J \subseteq \mathbb{N}$  definieren derart, dass die Familie  $U_j$ ,  $j \in J$ , auch noch die Endlichkeitseigenschaft erfüllt. Zu  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die kompakte Menge  $A_{n+1} \setminus A_n^o$ . Diese wird von endlich vielen der  $\alpha_k^{-1}(U(0, \delta_k))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , überdeckt, und zwar braucht man dazu nur Indizes  $k$  mit der Eigenschaft, dass  $U_k$  in  $A_{n+2}^o \setminus A_{n-1}$  liegt. Die zugehörige endliche Indexmenge sei mit  $J_n$  bezeichnet, und sei  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ . Dann wird jedes  $A_n$  nur von endlich vielen der  $U_k$ ,  $k \in J$ , getroffen.  $\square$

**SATZ 89.8.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine der Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins.*

*Beweis.* Nach Lemma 89.7 können wir davon ausgehen, dass eine offene Überdeckung von Kartengebieten  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit

$$\alpha_n : U_n \longrightarrow V_n$$

und mit Ballumgebungen

$$U(0, \delta_n) \subset B(0, \epsilon_n) \subset V_n$$

(mit  $\delta_n < \epsilon_n$ ) vorliegt derart, dass auch die  $\alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n))$  eine Überdeckung bilden und dass jeder Punkt  $P \in M$  nur in endlich vielen dieser offenen Bälle enthalten ist. Auf  $V_n$  betrachten wir die Funktion  $g_n$ , die durch

$$g_n(v) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\delta_n^2 - v^2)^2}} & \text{für } |v| < \delta_n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist. Diese Funktion hat genau auf  $U(0, \delta_n)$  einen positiven Wert und ihr Träger ist  $B(0, \delta_n)$ . Eine Überlegung auf den beiden offenen Teilmengen (die  $V_n$  überdecken)  $U(0, \epsilon_n)$  und  $V_n \setminus B(0, \delta_n)$  zeigt, dass  $g_n$  unendlich oft differenzierbar ist. Wir definieren eine Funktion

$$\tilde{g}_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g(\alpha_n(x)) & \text{für } x \in \alpha_n^{-1}(U(0, \delta_n)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf  $M$ , da der „Streifen“  $B(0, \epsilon_n) \setminus U(0, \delta_n)$  einen glatten Übergang erlaubt. Wir setzen

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{g}_n(x),$$

wobei dies für jeden Punkt eine endliche Summe ist, da der Träger von  $\tilde{g}_n$  in  $\alpha^{-1}(B(0, \delta_n)) \subset U_n$  liegt. Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf  $M$  und überall positiv, da die  $\tilde{g}_n(x)$  auf den überdeckenden Mengen  $\alpha^{-1}(U(0, \delta_n))$  positiv sind. Dann bilden die

$$h_n = \frac{\tilde{g}_n}{\tilde{g}}$$

die gesuchte Partition der Eins.  $\square$

## Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten und Volumenformen

Mit Hilfe von Partitionen der Eins können wir nun die Umkehrung von Lemma 84.5 beweisen.

**SATZ 89.9.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann existiert genau dann eine stetige nullstellenfreie Volumenform auf  $M$ , wenn  $M$  orientierbar ist.*

*Beweis.* Die eine Richtung wurde bereits in Lemma 84.5 bewiesen. Es sei also umgekehrt ein abzählbarer orientierter Atlas  $(U_i, V_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$ , von  $M$  gegeben. Dabei ist  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  definieren eine nullstellenfreie stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) Volumenform  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  auf  $V_i$ . Wir setzen

$$\omega_i = \alpha_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und erhalten so eine nullstellenfreie Volumenform auf  $U_i$ , die wir außerhalb von  $U_i$  durch 0 fortsetzen.<sup>1</sup>

Es sei nun  $h_j$ ,  $j \in J$ , eine der Überdeckung  $U_i$ ,  $i \in I$ , untergeordnete, stetige Partition der Eins, die es nach Satz 89.8 gibt. Insbesondere gibt es also für jedes  $j$  ein  $i(j)$  derart, dass der Träger von  $h_j$  in  $U_{i(j)}$  liegt. Daher sind die  $h_j \omega_{i(j)}$  stetige  $n$ -Differentialformen auf  $M$ . Wir setzen

$$\omega = \sum_{j \in J} h_j \omega_{i(j)}.$$

Dies ist für jeden Punkt  $P \in M$  eine endliche Summe und somit eine wohldefinierte stetige  $n$ -Differentialform auf  $M$ . Für einen Punkt  $P \in M$  und eine die Orientierung repräsentierende Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $T_P M$  ist

$$\omega(P; v_1, \dots, v_n) = \sum_{j \in J} h_j(P) \omega_{i(j)}(P; v_1, \dots, v_n).$$

Dabei gibt es ein  $j$  mit  $h_j(P) > 0$ , und für dieses  $j$  ist auch  $\omega_{i(j)}(P; v_1, \dots, v_n) > 0$ , so dass diese Form überall positiv ist.  $\square$

<sup>1</sup>Diese Fortsetzung ist natürlich nicht stetig, das spielt aber für das Folgende keine Rolle.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Inner point.png, Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons,  
Lizenz = PD 1
- Quelle = Partition of unity illustration.svg, Autor = Benutzer Oleg  
Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 2