Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2. Berechne die Werte der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ für $n \leq 20$.

Aufgabe 3. Finde einen Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ derart, dass die Einheitengruppe davon nicht zyklisch ist.

Aufgabe 4. Bestimme die nilpotenten Elemente, die idempotenten Elemente und die Einheiten von $\mathbb{Z}/(100)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

(a) Bestimme für die Zahlen 4, 5 und 11 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung a der simultanen Kongruenzen

$$a = 3 \mod 4,\ a = 2 \mod 5 \text{ und } a = 10 \mod 11\,.$$

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass auch $1-e$ idempotent ist und dass die „zusammengesetzte" Restklassenabbildung

$$R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Es seien a und n natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i n^i$$

die Darstellung von a zur Basis n (also mit $0 \leq a_i < n$). Es sei k ein Teiler von $n-1$. Dann wird a von k genau dann geteilt, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von k geteilt wird.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$EA09B4CA\,.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

ist für alle $k = 1, \ldots, p-1$.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobenius-Homomorphismus* nennt.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p ist für jede ganze Zahl a.

Aufgabe 13. (8 Punkte)

(1) Zu einem Körper K sei $R = \mathrm{Folg}(K)$ die Menge der *Folgen* mit Werten in K. Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist. Besitzt ein solcher Ring nicht-triviale idempotente Elemente?

(2) Sei von nun an $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so dass man eine Metrik zur Verfügung hat. Zeige, dass die Menge der *konvergenten Folgen* $\mathrm{Folg}_{\mathrm{konv}}(K)$ einen Unterring von R bildet.

(3) Zeige im Fall $K = \mathbb{Q}$, dass die Menge $\mathrm{Folg}_{\mathrm{Cauchy}}(\mathbb{Q})$ der *Cauchy-Folgen* ebenfalls ein Unterring ist.

(4) Betrachte nun die Menge N der *Nullfolgen* und begründe, dass diese ein Ideal in den verschiedenen Ringen ist. Zeige, dass N die Eigenschaft besitzt, dass wenn $x \cdot y \in N$ ist, dass dann einer der Faktoren dazu gehören muss.

(5) Definiere einen natürlichen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{Folg}_{\mathrm{Cauchy}}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass eine Ringisomorphie

$$\mathrm{Folg}_{\mathrm{Cauchy}}(\mathbb{Q})/N \longrightarrow \mathbb{R}$$

entsteht.