Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 18.1. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebra-Isomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

AUFGABE 18.2. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

AUFGABE 18.3. Sei M ein numerisches Monoid. Bestimme die Filter in M.

AUFGABE 18.4. Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K-Spektren $K-\operatorname{Spek}(K[M]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K-\operatorname{Spek}(K[N]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

AUFGABE 18.5.*

Ein Geldfälscher stellt $7-, 11-, 13-$ und $37-$Euro-Scheine her. Wie viele volle Eurobeträge kann er mit seinen Scheinen nicht bezahlen, und was ist der größte Betrag, den er nicht begleichen kann? Bestimme die Multiplizität und die Einbettungsdimension des zugehörigen numerischen Monoids.

AUFGABE 18.6.*

Bestimme für das numerische Monoid $M \subseteq \mathbb{N}$, das durch $4, 7$ und 17 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.7. Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $5, 7$ und 9 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.8. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Zeige, dass die Einbettungsdimension maximal gleich der Multiplizität ist.

Aufgabe 18.9. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Zahlen erzeugtes numerisches Monoid, bei dem die Einbettungsdimension gleich der Multiplizität ist. Zeige, dass dann der maximale Erzeuger aus einem minimalen Erzeugendensystem größer oder gleich der Führungszahl ist.

Aufgabe 18.10. Man gebe ein Beispiel eines numerischen Monoids M mit Multiplizität 3 und Einbettungsdimension 3 an, bei dem die Führungszahl prim ist und nicht zum minimalen Erzeugendensystem gehört.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.11. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

(1) Filter in M.
(2) $\operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, (\{0,1\}, 1, \cdot))$.
(3) $\mathbb{F}_2 - \operatorname{Spek}(M)$
(4) $\{\varphi \in K-\operatorname{Spek}(K[M]) | \, \varphi(M) \subseteq \{0,1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 18.12. (6 Punkte)

Es sei M ein numerisches Monoid, das durch zwei teilerfremde Elemente $d > e$ erzeugt werde. Bestimme die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad von M.

Aufgabe 18.13. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $3, 7, 9$ und 11 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien M, N numerische Monoide mit $M \subseteq N$. Zeige, dass die zugehörige Spektrumsabbildung surjektiv ist.

Es ist dabei hilfreich, Fakt ***** zu verwenden.

Aufgabe 18.15. (3 Punkte)

Seien M, N numerische Monoide. Für welche der numerischen Invarianten ν (Multiplizität, Führungszahl, Singularitätsgrad, Einbettungsdimension) folgt aus $M \subseteq N$ die Abschätzung $\nu(M) \geq \nu(N)$?

(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 18.16. (3 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Man gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.