

## Mathematik für Anwender II

### Vorlesung 43

#### Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben, d.h.

$$v' = Mv$$

mit einer konstanten Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Wir lassen hier also auch den Fall zu, dass die Einträge komplexe Zahlen sind. Beim Auffinden der Lösungen zu einer reellen Matrix ist es nämlich hilfreich, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufzufassen, um dort Umformungen durchzuführen, die im Reellen nicht möglich sind. Die Lösungen werden aber nach wie vor auf reellen Intervallen definiert sein. Wir erwähnen einige Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

( $I$  ist ein reelles Intervall oder eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ) die bei der Berechnung von Differentialgleichungen zum Zuge kommen. Zunächst lässt sich die reelle Exponentialfunktion  $e^x$  (unter Verwendung der Exponentialreihe) zu einer Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z$$

ausdehnen. Diese ist komplex-differenzierbar, und zwar ist die Ableitung wieder die Exponentialfunktion selbst. Für eine komplexe Zahl  $u$  gilt  $(e^{uz})' = ue^{uz}$ . Zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht der Zusammenhang (die *Formel von Euler*)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

(wobei  $t$  reell oder komplex sein kann).

Ausgeschrieben liegt also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

vor. Solche Systeme lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra auf eine Folge von inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen zurückführen und damit sukzessive lösen. Das folgende einfache Lemma gibt bereits einen deutlichen Hinweis darauf, dass lineare Eigenschaften der Matrix  $M$  eng mit den Lösungen des Differentialgleichungssystems zusammenhängen.

LEMMA 43.1. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei  $u \in \mathbb{K}^n$  ein Eigenvektor zu  $M$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$

( $c \in \mathbb{K}$ ) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

*Beweis.* Dies folgt direkt wegen

$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ \lambda ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= M \left( ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \\ &= M \begin{pmatrix} ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

DEFINITION 43.2. Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann nennt man das charakteristische Polynom

$$\chi_M = \det(tE_n - M)$$

auch das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nach Fakt \*\*\*\*\* Eigenwerte von  $M$  und liefern nach Fakt \*\*\*\*\* Lösungen des Differentialgleichungssystems.

BEMERKUNG 43.3. Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$v' = Mv$$

das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das zu dieser Matrix gehörige charakteristische Polynom ist nach Aufgabe \*\*\*\*\* gleich

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

D.h. man kann dieses Polynom direkt aus der eingangs gegebenen Differentialgleichung höherer Ordnung ablesen.

BEISPIEL 43.4. Zu einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$t^2 + a_1t + a_0.$$

Dessen Nullstellen sind einfach zu bestimmen, es ist

$$t_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Nun untersuchen wir systematisch, wie man Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten löst.

LEMMA 43.5. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, es sei  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine invertierbare Matrix und es sei

$$N = BMB^{-1}.$$

Dann ist

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto v(t),$$

genau dann eine Lösung von  $v' = Mv$ , wenn  $w = Bv$  eine Lösung der Differentialgleichung  $w' = Nw$  ist.

*Beweis.* Es sei vorausgesetzt, dass  $v' = Mv$  ist. Dann gelten für  $w = Bv$  mit  $B = (b_{ij})_{ij}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} w'(t) &= \begin{pmatrix} w'_1(t) \\ \vdots \\ w'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11}v_1(t) + \dots + b_{1n}v_n(t))' \\ \vdots \\ (b_{n1}v_1(t) + \dots + b_{nn}v_n(t))' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}v'_1(t) + \dots + b_{1n}v'_n(t) \\ \vdots \\ b_{n1}v'_1(t) + \dots + b_{nn}v'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} v'_1(t) \\ \vdots \\ v'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= BM \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \\ &= BMB^{-1} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass  $w$  die Differentialgleichung  $w' = Nw$  löst. Die inverse Transformation zeigt, dass zu einer Lösung von  $w' = Nw$  die Abbildung  $B^{-1}w$  eine Lösung für  $v' = Mv$  ist.  $\square$

SATZ 43.6. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$w' = Nw \text{ mit } N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ \vdots \\ w_{n-1}' \\ w_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

(mit  $c_{ij} \in \mathbb{C}$ ) ist. Dieses System lässt sich sukzessive von unten nach oben mit dem Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen in einer Variablen lösen. Wenn zusätzlich Anfangsbedingungen  $v_i(t_0) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gegeben sind, so ist die Lösung eindeutig.

*Beweis.* Aufgrund von Fakt \*\*\*\*\* ist die Matrix  $M$  trigonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass

$$N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt. Das lineare Differentialgleichungssystem  $w' = Nw$  besitzt also die angegebene Gestalt, und es ist wegen Fakt \*\*\*\*\* äquivalent zum ursprünglichen System. Die letzte Zeile des neuen Systems, also

$$w_n' = c_{nn}w_n,$$

ist eine lineare Differentialgleichung in einer Variablen, ihre Lösungen sind  $w_n(t) = ae^{c_{nn}t}$ . Die zweitletzte Zeile ist

$$w_{n-1}' = c_{n-1,n-1}w_{n-1} + c_{n-1,n}w_n,$$

worin man die Lösung für  $w_n$  einsetzen kann. Dann erhält man eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung in der einen Variablen  $w_{n-1}$ , die man mit dem angegebenen Lösungsverfahren lösen kann. Für die drittletzte Zeile sind dann  $w_{n-1}$  und  $w_n$  schon bekannt und dies führt wieder zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung für  $w_{n-2}$ . So erhält man sukzessive eine Gesamtlösung  $(w_1, \dots, w_n)$ . Eine Anfangsbedingung für  $v' = Mv$  übersetzt sich direkt in eine Anfangsbedingung für  $w' = Nw$ . In dem soeben beschriebenen Lösungsverfahren gibt es dann jeweils eine Anfangsbedingung für die inhomogenen Differentialgleichungen, so dass die Lösungen jeweils eindeutig sind.  $\square$

SATZ 43.7. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Anfangsbedingung  $v(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es genau eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für dieses Anfangswertproblem.

*Beweis.* Aufgrund von Fakt \*\*\*\*\* gibt es eine eindeutige komplexwertige Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

für dieses Differentialgleichungssystem. Da eine reellwertige Lösung insbesondere eine komplexwertige Lösung ist, liegt Eindeutigkeit vor. Der Realteil der komplexen Lösung, also

$$\text{Re}(v): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \text{Re}(v(t)),$$

ist ebenfalls eine Lösung dieses Systems. Wegen der Eindeutigkeit muss  $v = \text{Re}(v)$  sein.  $\square$

KOROLLAR 43.8. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Menge der Lösungen

$$\varphi: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

*Beweis.* Dass der Lösungsraum ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist kann man direkt nachrechnen. Aufgrund von Fakt \*\*\*\*\* bzw. Fakt \*\*\*\*\* gibt es zu jedem Vektor

$$w \in \mathbb{K}^n$$

genau eine Lösung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

mit  $\varphi(0) = w$ . Die Zuordnung, die einen Anfangswert  $w$  auf die Lösung zu diesem Anfangswertproblem abbildet, ist linear, so dass eine lineare Isomorphie zwischen  $\mathbb{K}^n$  und dem Lösungsraum vorliegt.  $\square$

DEFINITION 43.9. Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Basis des Lösungsraumes ein *Fundamentalsystem von Lösungen* dieses Systems.

KOROLLAR 43.10. Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrix  $M$  sei diagonalisierbar mit den Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_n$ . Dann ist der Lösungsraum der Differentialgleichung gleich

$$\{c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot u_n \mid c_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei  $\lambda_i$  der Eigenwert zu  $u_i$  ist.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Fakt \*\*\*\*\* und aus Fakt \*\*\*\*\*.  $\square$

BEISPIEL 43.11. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für  $v_2(t) = 0$  ergibt sich aus der ersten Zeile (bis auf skalare Vielfache) sofort  $v_1 = e^{\lambda t}$ , was insgesamt der Lösung

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gemäß Fakt \*\*\*\*\* entspricht.

Sei nun  $v_2 \neq 0$ . Dann führt die zweite Zeile zu  $v_2 = e^{\mu t}$ , was wir Fakt \*\*\*\*\* entsprechend zu einer Gesamtlösung fortsetzen. Die erste Zeile lautet somit

$$v_1' = \lambda v_1 + \gamma e^{\mu t}.$$

Die Lösung des zugehörigen homogenen Gleichung ist  $c \cdot e^{\lambda t}$ , so dass sich mit der Variation der Konstanten der Ansatz  $v_1(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$  mit

$$c'(t) = \gamma \cdot e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} = \gamma \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$$

ergibt.

Bei  $\mu = \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \gamma t$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Bei  $\gamma \neq 0$  gehört diese zweite Lösung nicht zu einem Eigenvektor.

Bei  $\mu \neq \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{\mu t} \\ e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wieder eine Lösung, die zu einem Eigenvektor gehört.

BEISPIEL 43.12. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in  $\mathbb{R}_+$  befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v$ , zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit  $v$  besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben. Wir werden diese Lösung mit den Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen herleiten. Die Differentialgleichung führt zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$y^2 + 1 = (y - i)(y + i),$$

und Eigenvektoren sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $i$ ) und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $-i$ ). Die allgemeine komplexe Lösung ist also nach Fakt \*\*\*\*\* gleich

$$y_0(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

wobei letztlich nur die erste Zeile interessiert. Die Anfangsbedingung führt zu

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ und } c_1 i - c_2 i = v.$$

Also ist  $c_2 = -c_1$  und  $c_1 = \frac{v}{2i}$ . Daher ist die Lösung

$$\frac{v}{2i} e^{it} - \frac{v}{2i} e^{-it} = v \cdot \sin t$$

nach Fakt \*\*\*\*\*.

## Abbildungsverzeichnis