Prof. Dr. H. Brenner Osnabrï¿½ck SS 2012

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 58

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 58.1. Bestätige den Satz von Green für das Einheitsquadrat $T = [0,1] \times [0,1]$ und das Vektorfeld

$$F(x,y) = (xy, y^2)$$

durch explizite Berechnungen.

Aufgabe 58.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge, die durch die x-Achse, die Gleichung $x = 1$ und den Parabelbogen begrenzt wird, und es sei $F(x,y) = (x+y^2, x^2y)$ ein Vektorfeld. Bestätige den Satz von Green für diese Situation durch explizite Berechnungen.

Aufgabe 58.3. Bestätige den Satz von Green durch explizite Berechnungen für die Menge $T = [-2,2] \times [-2,2] \setminus U(0,1)$ (also das zentrierte Quadrat der Seitenlänge 4 ohne den offenen Einheitskreis) und das Vektorfeld $F(x,y) = (x-y, xy)$.

Aufgabe 58.4. Man mache sich klar, dass der Satz von Green nicht behauptet, dass der Flächeninhalt eines umrandeten Gebiets im $\mathbb{R}^2$ nur von der Länge des Randes abhängt.

Aufgabe 58.5. Es sei T das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und $h(x,y) = x^2y$. Finde ein stetig differenzierbares Vektorfeld F mit

$$h(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und berechne damit $\int_T h d\lambda^2$ durch ein Wegintegral über den Dreiecksrand.

Aufgabe 58.6. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto z^{-1}$$

das komplexe Invertieren. Zeige, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil dieser Funktion (jeweils aufgefasst als eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$) eine harmonische Funktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 58.7. (4 Punkte)

Es sei T das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und

$$h(x,y) = (3x^2y^5 - x \sin y).$$

Finde ein stetig differenzierbares Vektorfeld F mit

$$h(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und berechne damit $\int_T h d\lambda^2$ durch ein Wegintegral über den Dreiecksrand.

Aufgabe 58.8. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Green für das Einheitsquadrat $T = [0,1] \times [0,1]$ und die Vektorfelder

$$F(x,y) = (x^a y^b, x^c y^d)$$

mit $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ durch explizite Berechnungen.

Aufgabe 58.9. (5 Punkte)

Bestätige den Satz von Green durch explizite Berechnungen für die Menge $T = B(0,2) \setminus U(0,1)$ und das Vektorfeld $F(x,y) = (2x^2 - xy, xy^3)$.

Aufgabe 58.10. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe über ein geeignetes Wegintegral.

Aufgabe 58.11. (4 Punkte)

Es sei γ ein stückweise regulärer Weg, der das durch die $x-$Achse, die beiden Gleichungen $x = \frac{1}{3}$ und $x = 5$ und die Hyperbel (also den Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$) gegebene Gebiet gegen den Uhrzeigersinn umrandet. Berechne das Wegintegral über γ zum (auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{>-1}$ definierten) Vektorfeld

$$F(x,y) = \left(\sin\left(x^5\right),\ \ln x + \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

Aufgabe 58.12. (5 Punkte)

Es sei

$$P \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine komplexe Polynomfunktion. Zeige, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil dieser Funktion (jeweils aufgefasst als eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$) eine harmonische Funktion ist.