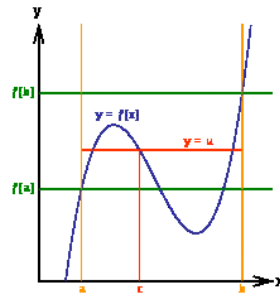


Mathematik für Anwender I

Vorlesung 19

Der Zwischenwertsatz

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist.



SATZ 19.1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz von einem solchen x mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und betrachtet die Intervallmitte $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Man berechnet

$$f(x_0).$$

Bei $f(x_0) \leq c$ setzt man

$$a_1 := x_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(x_0) > c$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := x_0.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl x ist eine Nullstelle der Funktion: Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq c$ und das überträgt sich auf den Grenzwert x , und für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq c$ und das überträgt sich ebenfalls auf x . \square

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

KOROLLAR 19.2. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b .

Beweis. Dies folgt direkt aus Fakt ***** □

BEISPIEL 19.3. Die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in \mathbb{Q} keine Lösung gibt.

Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion

Für stetige Funktionen auf reellen Intervallen ist die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

SATZ 19.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Fakt ***** und aus Fakt *****. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f : I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g = f^{-1}$ und $y = f(x)$ vorgegeben. Es sei y kein Randpunkt von J . Dann ist auch x kein Randpunkt von I . Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

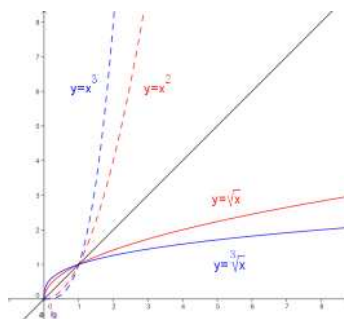
$$\delta := \min(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt

$$g(y') \in [g(y - \delta), g(y + \delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Also ist g stetig in y . Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I , sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. □

Wurzeln



SATZ 19.5. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^n,$$

streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die Potenzfunktionen wie angegeben surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Fakt *****. \square

Der Satz von Bolzano-Weierstraß



Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

SATZ 19.6. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 = [a_0, b_0]$. Sei das k -te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

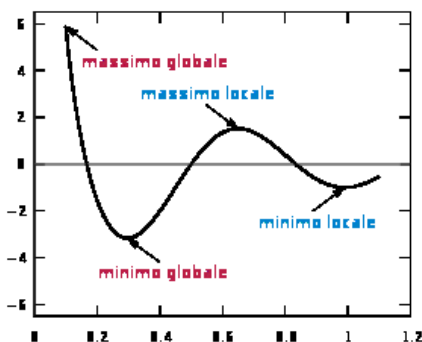
$$\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right] \text{ und } \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right].$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_{k+1} > n_k$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x . \square

Minima und Maxima



DEFINITION 19.7. Sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt,}$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt.}$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch von *globalem Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des lokalen Maximums.

DEFINITION 19.8. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $d(x, x') \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

SATZ 19.9. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in [a, b]$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a, b].$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz wissen wir, dass das Bild $J = f([a, b])$ ein Intervall ist. Wir zeigen zunächst, dass J (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Wir nehmen dazu an, dass J nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $f(x_n) \geq n$. Nach Fakt ***** besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, deren Bildfolge dann ebenfalls unbeschränkt ist. Nach Fakt ***** kann die Bildfolge nicht konvergieren, was im Widerspruch zur Stetigkeit steht. Sei nun y das Supremum von J . Es gibt eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in J$, die gegen das Supremum konvergiert. Nach Definition von J gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Für diese Folge gibt es wieder nach Fakt ***** eine konvergente Teilfolge. Es sei x der Grenzwert dieser Teilfolge. Dann ist aufgrund der Stetigkeit $f(x) = y$ und daher $y \in J$. \square

Mit der Differentialrechnung werden wir bald schlagkräftige Methoden kennenlernen, um Minima und Maxima zu bestimmen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Intermediatevaluetheorem.svg, Autor = Enoch Lau (= Benutzer Kpengboy auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = RacineNieme.svg, Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Karl Weierstrass 2.jpg, Autor = Conrad Fehr, Lizenz = PD	4
Quelle = Extrema example it.svg, Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4