Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 21.1. Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ auflösbare Körpererweiterungen. Zeige, dass auch $K \subseteq M$ auflösbar ist.

AUFGABE 21.2. Es sei $K \subseteq L$ eine auflösbare Körpererweiterung. Es sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung und es sei $L' = LK'$ das Kompositum von L und K' (das in einem gewissen Oberkörper gebildet sei). Zeige, dass auch $K' \subseteq L'$ auflösbar ist.

AUFGABE 21.3. Es sei K ein Körper und seien $P, F \in K[X]$ Polynome. Wir setzen $Q = P(F)$ (in P wird also das Polynom F eingesetzt). Zeige, dass man den Zerfällungskörper von P in den Zerfällungskörper von Q einbetten kann.

AUFGABE 21.4. Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein auflösbares Polynom. Zeige, dass auch $P(X^n)$ auflösbar ist.

Nach Aufgabe 5.4 ist das Zentrum $Z_1 = Z = Z(G)$ einer Gruppe G ein Normalteiler in G. Folglich gibt es eine Restklassengruppe $G/Z(G)$, die selbst wiederum ein Zentrum besitzt. Das Urbild dieser Gruppe in G wird mit Z_2 bezeichnet; sie ist wieder ein Normalteiler in G, so dass man eine Filtration

$$0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \cdots$$

von Normalteilern in G erhält. Diese Filtration nennt man *Zentralreihe*.

Eine Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn ihre Zentralreihe bei G endet, d.h. wenn G mit einer iterierten Zentrumsgruppe $Z_n(G)$ übereinstimmt.

AUFGABE 21.5. Zeige, dass eine nilpotente Gruppe auflösbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.6. (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \operatorname{Fix}(H_1)$ und $K_2 = \operatorname{Fix}(H_2)$. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 gleich dem Fixkörper von $H_1 \cap H_2$ ist.

Aufgabe 21.7. (3 Punkte)

Sei n eine ungerade Zahl. Man gebe eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n derart, dass $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ trivial ist.

Aufgabe 21.8. (8 (5+3) Punkte)

Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ein reguläres n-Eck ($n \geq 3$) mit den Eckpunkten $v_1, \ldots, v_n$, und es sei V der von diesen Eckpunkten erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

a) Zeige die Abschätzungen

$$\varphi(n) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(V) \leq \varphi(n) + 1.$$

(Dabei bezeichnet $\varphi(n)$ die eulersche φ-Funktion).

b) Zeige, dass in (a) sowohl links als auch rechts Gleichheit gelten kann.

Aufgabe 21.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die Tabelle, die für kleine p und n die endlichen Kreisteilungskörper beschreibt.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1	2	1	4	2	3	1	6	4	10	2
3	1	1	1	2	4	1	6	2	1	4	5	2
5	1	1	2	1	1	2	6	2	6	1	5	2
7	1	1	1	2	4	1	1	2	3	4	10	2
11	1	1	2	2	1	2	3	2	6	1	1	2
13	1	1	1	1	4	1	2	2	3	4	10	1
17	1	1	2	1	4	2	6	1	2	4	10	2
19	1	1	1	2	2	1	6	2	1	2	10	2
23	1	1	2	2	4	2	3	2	6	4	1	2
29	1	1	2	1	2	2	1	2	6	2	10	2
31	1	1	1	2	1	1	6	2	3	1	5	2
37	1	1	1	1	4	1	3	2	1	4	5	1

Begründe die folgenden (mehr oder weniger sichtbaren) Eigenschaften der Tabelle.

a) Für jedes n sind die Einträge in der n-ten Spalte $\leq \varphi(n)$.

b) Für jedes p kommt in der p-ten Zeile die 1 unendlich oft vor.

Aufgabe 21.10. (3 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, für die jede Untergruppe ein Normalteiler sei. Zeige, dass G auflösbar ist.

Die folgende Aufgabe ist ein Kollektivaufgabe.

Aufgabe 21.11. (20 Punkte)

Man lege die folgende Tabelle an, die für kleine Primzahlen p zeigt, wie die Primfaktorzerlegung der Kreisteilungspolynome in $\mathbb{Z}/(p)[X]$ aussieht.

n	Φ_n	2	3	5	7	11	13
1	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$
2	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$
3	X^2+X+1	X^2+X+1	$(X+2)^2$				
4	X^2+1	$(X+1)^2$	X^2+1	$(X+2)(X+3)$			
5							
6							
7							
8							
9							
10							
12							
15							