Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Vorlesung 16

Irreduzible Filter

Einen Filter kann man mit dem, was in ihm hängen bleibt, identifizieren.

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass zu einem Punkt P in einem K-Spektrum $K-\operatorname{Spek}(R)$ der Umgebungsfilter gehört und dass der Halm in diesem Filter gleich der Lokalisierung von R an dem zugehörigen maximalen Ideal ist. Ebenfalls haben wir gesehen, dass bei integrem R der Halm über alle nichtleeren offenen Mengen den Quotientenkörper von R liefert, der wiederum die Lokalisierung am Nullideal ist. Dieser Zusammenhang wird mit dem Begriff des irreduziblen Filters verallgemeinert.

Definition 16.1. Ein topologischer Filter F heißt *irreduzibel*, wenn $\emptyset \notin F$ und folgendes gilt: Sind U, V zwei offene Mengen mit $U \cup V \in F$, so ist $U \in F$ oder $V \in F$.

Für Zariski-Filter (also topologische Filter in der Zariski-Topologie) gilt folgender Zusammenhang.

Satz 16.2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ mit K-Spektrum $X = K-\operatorname{Spek}(R)$. Dann entsprechen sich folgende Objekte.*

(1) *Primideale in R.*
(2) *Irreduzible abgeschlossene Teilmengen von X.*
(3) *Irreduzible Filter in X.*

Dabei entspricht der irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $Y \subseteq X$ der Filter

$$F(Y) = \{U \subseteq X | \, U \cap Y \neq \emptyset\} \; .$$

Der Halm der Strukturgarbe an diesem Filter ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal bezeichnet.

Beweis. Die Korrespondenz zwischen Primidealen und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen (zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehört die irreduzible abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{p})$) ist bekannt (siehe Lemma 4.3 und Fakt *****). Die angegebene Konstruktion zu einer irreduziblen abgeschlossenen Menge Y liefert in der Tat einen irreduziblen Filter. Dabei ist die Irreduzibilität trivial, zu zeigen ist lediglich die Durchschnittseigenschaft eines Filters. Seien $U, V \in F = F(Y)$, so dass also die Durchschnitte $Y \cap U$ und $Y \cap V$ nicht leer sind. Dann ist aber wegen der Irreduzibilität von Y auch der Durchschnitt

$$(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V)$$

nicht leer und daher ist $U \cap V \in F$.

Sei nun F irgendein irreduzibler topologischer Filter. Wir behaupten, dass das Komplement von

$$S = \{f \in R | \, D(f) \in F\}$$

ein Primideal ist. Es ist sofort ein saturiertes multiplikatives System. Es bleibt zu zeigen, dass das Komplement additiv abgeschlossen ist. Seien dazu $h, g \in R$ mit $g + h \in S$, also $D(g + h) \in F$. Dann gehört erst recht

$$D(g) \cup D(h) = D(g, h) \supseteq D(g + h)$$

zu F und wegen der Irreduzibilität von F ist $D(g) \in F$ oder $D(h) \in F$, woraus sich $g \in S$ oder $h \in S$ ergibt.

Diese drei Zuordnungen hintereinandergenommen führen dabei immer wieder zum Ausgangsobjekt zurück. Dazu muss man lediglich beachten, dass ein irreduzibler Zariski-Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird, siehe Aufgabe *****. Der Zusatz ist ein Spezialfall von Aufgabe *****. □

Den zu einer irreduziblen abgeschlossenen Menge gehörenden Filter nennen wir auch den zugehörigen *generischen Filter* zu Y und den Halm davon den *generischen Halm* zu Y. Ein Spezialfall der Korrespondenz von Fakt ***** ist die Beziehung zwischen minimalen Primidealen, irreduziblen Komponenten und Ultrafiltern. Auf der anderen Seite hat man die Korrespondenz zwischen maximalen Idealen, Punkten und Umgebungsfiltern.

Morphismen zwischen Varietäten

Definition 16.3. Seien X und Y zwei quasiaffine Varietäten und sei

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Dann nennt man ψ einen *Morphismus* (von quasiaffinen Varietäten), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gilt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_K$$

zu $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O})$ gehört.

Bemerkung 16.4. Ein Morphismus

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

induziert also nach Definition zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ einen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi} : \Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O}) .$$

Insbesondere gibt es einen *globalen Ringhomomorphismus*

$$\tilde{\psi} : \Gamma(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}) .$$

Sind $U_1 \subseteq U_2$ offene Teilmengen in Y, so liegt ein kommutatives Diagramm von stetigen Abbildungen vor (wobei die senkrechten Pfeile offene Inklusionen sind)

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U_1) & \longrightarrow & U_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi^{-1}(U_2) & \longrightarrow & U_2 \end{array} ,$$

das wiederum zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\psi^{-1}(U_1), \mathcal{O}) & \longleftarrow & \Gamma(U_1, \mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma(\psi^{-1}(U_2), \mathcal{O}) & \longleftarrow & \Gamma(U_2, \mathcal{O}) \end{array}$$

von Ringhomomorphismen führt.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften von Morphismen zusammen

Proposition 16.5. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien U, X, Y, Z quasiaffine Varietäten. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Eine offene Einbettung $U \subseteq X$ ist ein Morphismus.*
(2) *Sind $\theta : Z \to Y$ und $\psi : Y \to X$ Morphismen, so ist auch die Verknüpfung $\psi \circ \theta$ ein Morphismus.*

Beweis. Das ist trivial. □

Wichtiger sind die folgenden Eigenschaften.

Satz 16.6. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K-Algebren vom endlichen Typ mit zugehörigen K-Spektren*

$X = K-\text{Spek}\,(R)$ und $Y = K-\text{Spek}\,(S)$. Dann ist die durch einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ induzierte Spektrumsabbildung

$$\varphi^* : Y \longrightarrow X$$

ein Morphismus.

Beweis. Wir wissen bereits nach Fakt *****, das

$$Y = K-\text{Spek}\,(S) \longrightarrow X = K-\text{Spek}\,(R)$$

eine stetige Abbildung ist. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $V = (\varphi^*)^{-1}(U)$ das Urbild. Sei $f : U \to K$ eine algebraische Funktion mit der Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi^* : V \to K$. Wir haben zu zeigen, dass diese Abbildung ebenfalls algebraisch ist. Sei dazu $P \in V$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $Q = \varphi^*(P)$. Sei $Q \in D(H) \subseteq U$ und $f = G/H$ auf $D(H)$ mit $G, H \in R$. Es ist

$$P \in (\varphi^*)^{-1}(D(H)) = D(\varphi(H))\,.$$

Wir behaupten, dass auf $D(\varphi(H))$ die Gleichheit $f \circ \varphi^* = \frac{\varphi(G)}{\varphi(H)}$ gilt. Dies folgt für $\tilde{P} \in D(\varphi(H))$ aus

$$f \circ \varphi^*(\tilde{P}) = f(\varphi^*(\tilde{P})) = \frac{G(\varphi^*(\tilde{P}))}{H(\varphi^*(\tilde{P}))} = \frac{(\varphi(G))(\tilde{P})}{(\varphi(H))(\tilde{P})}\,.$$

□

Bemerkung 16.7. In der Situation von Fakt ***** ist der zu $U = D(f)$ gehörende Ringhomomorphismus die natürliche Abbildung

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}) \cong R_f \longrightarrow \Gamma((\varphi^*)^{-1}(D(f)), \mathcal{O}) = \Gamma(D(\varphi(f)), \mathcal{O}) = S_{\varphi(f)}\,.$$

Lemma 16.8. *Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Dann definiert f einen Morphismus*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 \cong K\,.$$

Beweis. Sei $U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$. Es sei $V = D(t) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ eine offene Teilmenge und $W = f^{-1}(V) \subseteq U$ das Urbild davon. Sei

$$s = \frac{r}{t^n} \in \Gamma(V, \mathcal{O}) = K[T]_t$$

eine algebraische Funktion auf V. Wir müssen zeigen, dass die Verknüpfung $s \circ f$ eine algebraische Funkion auf W ist. Sei dazu $P \in W$ und sei $f = G/H$ eine Beschreibung der nach Voraussetzung algebraischen Funktion f in der Umgebung $D(H) \ni P$. Dann ist

$$s \circ f(P) = s(f(P)) = \frac{r}{t^n}(\frac{G}{H}(P)) = \frac{r(G(P)/H(P))}{(t(G(P)/H(P)))^n}\,.$$

Dabei ist der Nenner $(t(G(P)/H(P)))^n$ nicht null, da $f(P) \in D(t)$ ist, so dass dies eine rationale Darstellung ist. □

Satz 16.9. *Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, und zwar sei $U \subseteq K-\operatorname{Spek}(R)$, wobei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossener Körper K sei. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\operatorname{Mor}(U, \mathbb{A}^1_K) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}),\ \psi \longmapsto \tilde{\psi}(T)\,,$$

wobei T die Variable in $K[T] = \Gamma(\mathbb{A}^1_K, \mathcal{O})$ bezeichnet. Insbesondere sind Morphismen von U nach der affinen Geraden durch den globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}\colon \Gamma(\mathbb{A}^1_K, \mathcal{O}) = K[T] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert und surjektiv. Ist nämlich eine globale algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gegeben, so ist zunächst $f : U \to K$. Die Variable T, die auf $K = \mathbb{A}^1_K$ der identischen Abbildung entpricht, wird unter (der Verknüpfung mit) f auf das Element $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ abgebildet. Nach Fakt ***** ist f ein Morphismus.

Die Injektivität ergibt sich, da sowohl der Morphismus als auch die algebraische Funktion durch die zugrunde liegende stetige Abbildung eindeutig festgelegt sind. □

Satz 16.10. *Sei U eine quasiaffine Varietät, und zwar sei $U \subseteq K-\operatorname{Spek}(R)$, wobei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossener Körper K sei. Es sei S eine weitere kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\operatorname{Mor}(U, K-\operatorname{Spek}(S)) \longrightarrow \operatorname{Hom}^{\text{alg}}_K(S, \Gamma(U, \mathcal{O})),\ \psi \longmapsto \tilde{\psi}\,,$$

wobei $\tilde{\psi}$ den zu ψ gehörigen globalen Ringhomomorphismus bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert. Aus Fakt ***** folgt, dass die Aussage für $S = K[T]$ richtig ist. Daraus ergibt sich, dass die Aussage für jeden Polynomring $K[T_1, \ldots, T_n]$ richtig ist, da ein Morphismus nach $\mathbb{A}^n_K$ durch seine Komponenten und ein K-Algebra-Homomorphismus durch die Einsetzungen für T_i gegeben ist. Sei nun $S = K[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ und

$$K-\operatorname{Spek}(S) \cong V(\mathfrak{a}) = V \subseteq \mathbb{A}^n_K\,.$$

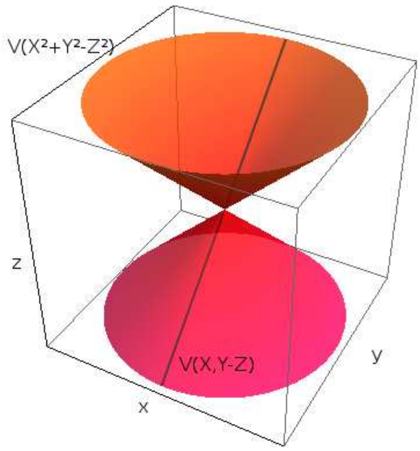
Zu einem Morphismus $U \to K-\operatorname{Spek}(S)$ ist die Verknüpfung mit der abgeschlossenen Einbettung in den affinen Raum ebenfalls ein Morphismus. D.h. es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Mor}(U, K-\operatorname{Spek}(S)) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}^{\text{alg}}_K(S, \Gamma(U, \mathcal{O})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Mor}(U, \mathbb{A}^n_K) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}^{\text{alg}}_K(K[T_1, \ldots, T_n], \Gamma(U, \mathcal{O})) \end{array}\,,$$

vor, wobei die untere Abbildung bereits als Bijektion nachgewiesen wurde. Die vertikalen Abbildungen sind injektiv. Wir müssen daher zeigen, dass die untere Abbildung die oberen Teilmengen ineinander überführt.

Ein Morphismus $U \to \mathbb{A}_K^n$, der (als Abbildung) durch V faktorisiert, ist auch ein Morphismus nach V. Die Morphismuseigenschaft ist nur für offene Mengen der Form $D(H)$ zu überprüfen, $H \in S$. Sei $\tilde{H} \in K[T_1, \ldots, T_n]$ ein Repräsentant für H. Dann ist $K[T_1, \ldots, T_n]_{\tilde{H}} \to S_H$ surjektiv und damit wird jedes Element aus S_H auf eine algebraische Funktion abgebildet.

Auf der rechten Seite des Diagramms gehört eine Algebra-Homomorphismus genau dann zur oberen Menge, wenn $\mathfrak{a}$ zum Kern gehört. Damit folgt die Aussage aus Aufgabe *****. □



Nicht jede außerhalb der Gerade auf dem Kegel definierte Funktion lässt sich auf den affinen Raum ohne die Gerade fortsetzen.

Beispiel 16.11. Wir betrachten den Standardkegel, der als abgeschlossene Teilmenge

$$V = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}_K^3 .$$

gegeben sei. Es sei $U = D(X, Z - Y) \subseteq \mathbb{A}_K^3$ die offene Teilmenge mit dem Schnitt $V \cap U = D(X, Z - Y)$ (in V), der eine offene Menge in V ist. Wir behaupten, dass der zugehörige Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

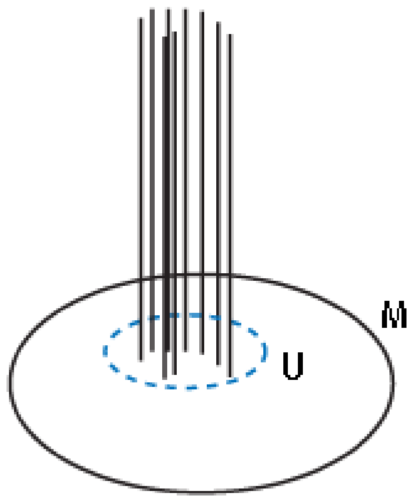
nicht surjektiv ist. Das liegt daran, dass rechts einfach der Polynomring in drei Variablen steht (vergleiche Fakt *****). Dagegen ergibt sich aus der Gleichung

$$X^2 = Z^2 - Y^2 = (Z - Y)(Z + Y) ,$$

dass es auf $U \cap V$ die algebraische Funktion

$$\frac{X}{Z - Y} = \frac{Z + Y}{X}$$

gibt, die nicht im Bild der Abbildung liegt, da es keine Funktion auf dem ganzen Kegel ist.



Die Fasern einer Abbildung (M ist der Zielbereich, der Definitionsbereich ist die Vereinigung aller Fasern; die Abbildung geht von oben nach unten).

Definition 16.12. Zu einem Morphismus $\psi : Y \to X$ zwischen affinen Varietäten bezeichnet man zu einem Punkt $P \in X$ das Urbild

$$\psi^{-1}(P) \subseteq Y$$

als die *Faser* über P. Als abgeschlossene Menge von Y ist sie selbst eine affine Varietät.

Abbildungsverzeichnis