**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2012**

# Algebraische Kurven

## Vorlesung 10

### Noethersche Moduln

Wir wollen zeigen, das für einen noetherschen Ring $R$ und einen endlich erzeugten $R$-Modul jeder $R$-Untermodul wieder endlich erzeugt ist. Solche Moduln nennt man noethersch.

Definition 10.1. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein $R$-Modul. Dann heißt $M$ *noethersch*, wenn jeder $R$-Untermodul von $M$ endlich erzeugt ist.

Für $M = R$ stimmt dies mit der Definition eines noetherschen Ringes überein, da ja die $R$-Untermoduln von $R$ gerade die Ideale sind.

In den folgenden Aussagen verwenden wir folgende Sprech- bzw. Schreibweise.

Definition 10.2. Sei $R$ ein kommutativer Ring und seien $M_1, M_2, M_3$ $R$-Moduln. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von $R$-Moduln, wenn $M_1$ ein $R$-Untermodul von $M_2$ ist, und wenn $M_3$ ein Restklassenmodul von $M_2$ ist, der isomorph zu $M_2/M_1$ ist.

Lemma 10.3. *Sei $R$ ein kommutativer Ring und*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln. Dann ist $M$ genau dann noethersch, wenn sowohl $M_1$ als auch $M_3$ noethersch sind.*

*Beweis.* Sei zunächst $M$ noethersch, und $U \subseteq M_1$ ein Untermodul. Dann ist $U$ direkt auch ein Untermodul von $M$, also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Sei nun $V \subseteq M_3$ ein Untermodul des Restklassenmoduls. Das Urbild von $V$ in $M$ unter der Restklassenabbildung sei $\tilde{V}$. Dieser Modul ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, und die Bilder eines solchen Erzeugendensystems erzeugen auch den Bildmodul $V$.

Seien nun die äußeren Moduln $M_1$ und $M_3$ noethersch, und sei $U \subseteq M$ ein Untermodul. Es sei $U_3 \subseteq M_3$ der Bild-Untermodul davon. $U_3$ wird von endlich vielen Elementen $s_1, \ldots, s_n$ erzeugt, und wir können annehmen, dass diese $s_i = \overline{r}_i$ die Bilder von Elementen $r_i \in U$ sind. Betrachte $U \cap M_1$. Dies ist ein

Untermodul von $M_1$, und daher endlich erzeugt, sagen wir von $t_1, \ldots, t_k$, die wir als Elemente in $U$ auffassen. Wir behaupten, dass

$$r_1, \ldots, r_n, t_1, \ldots, t_k$$

ein Erzeugendensystem von $U$ bilden. Sei dazu $m \in U$ ein beliebiges Element. Dann ist $\overline{m} = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ und daher geht das Element $m - \sum_{i=1}^n a_i r_i$ rechts auf null. Dann gehört es aber zum Kern der Restklassenabbildung, also zu $M_1$. Andererseits gehört dieses Element auch zu $U$, also zum Durchschnitt $M_1 \cap U$, der ja von den $t_1, \ldots, t_k$ erzeugt wird. Also kann man schreiben

$$m - \sum_{i=1}^n a_i r_i = \sum_{j=1}^k b_j t_j$$

bzw. $m = \sum_{i=1}^n a_i r_i + \sum_{j=1}^k b_j t_j$. □

Satz 10.4. *Sei $R$ ein noetherscher kommutativer Ring und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Dann ist $M$ ein noetherscher Modul.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl $n$ der Modul-Erzeuger von $M$. Bei $n = 0$ liegt der Nullmodul vor. Sei $n = 1$. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $R \to M \cong R/\mathfrak{a}$ vor. Nach Lemma 10.3 ist aber ein Restklassenmodul eines noetherschen Moduls wieder noethersch, und der Ring selbst ist nach Voraussetzung noethersch, also ist $M$ noethersch.

Sei nun $n \geq 2$ und die Aussage für kleinere $n$ bereits bewiesen. Sei $m_1, \ldots, m_n$ ein Erzeugendensystem von $M$. Wir betrachten den durch $m_1, \ldots, m_{n-1}$ erzeugten $R$-Untermodul, den wir mit $M_1$ bezeichnen. Dieser Untermodul gibt Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz, nämlich

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 =: M_3 \longrightarrow 0 .$$

Hier wird der linke Modul von $n-1$ Elementen erzeugt und ist nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Der rechte Modul wird von der Restklasse von $m_n$, also von einem Element erzeugt, ist also auch noethersch. Nach Lemma 10.3 ist dann $M$ noethersch. □

## Hilbertscher Nullstellensatz - algebraische Version

Wir wollen die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes beweisen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 10.5. *Sei $R$ ein noetherscher kommutativer Ring und $A$ eine endlich erzeugte $R$-Algebra. Es sei $B \subseteq A$ eine $R$-Unteralgebra, über der $A$ endlich (als $B$-Modul) sei. Dann ist auch $B$ eine endlich erzeugte $R$-Algebra.*

*Beweis*. Wir schreiben $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ und $A = Ba_1 + \ldots + Ba_m$ mit $a_i \in A$. Wir setzen

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_j \text{ und } a_i a_j = \sum_{k=1}^{m} b_{ijk} a_k$$

mit Koeffizienten $b_{ij}, b_{ijk} \in B$. Wir betrachten die von diesen Koeffizienten erzeugte $R$-Unteralgebra $S$ von $B$ und den $S$-Modul $\tilde{A} = Sa_1 + \ldots + Sa_m$. Die Produkte $a_i a_j$ gehören wieder zu diesem Modul, daher ist $\tilde{A}$ sogar eine $S$-Algebra. Weil die $x_i$ ebenfalls zu $\tilde{A}$ gehören, gilt sogar $A = \tilde{A}$. Dies bedeutet, dass $A$ ein endlicher $S$-Modul ist. Nach Korollar 9.9 ist $S$ ein noetherscher Ring und nach Satz 10.4 ist der $S$-Untermodul $B \subseteq A$ ebenfalls endlicher $S$-Modul. Die Kette $R \subseteq S \subseteq B$ zeigt schließlich, dass $B$ eine endlich erzeugte $R$-Algebra ist. □

Lemma 10.6. *Sei $K$ ein Körper und $R = K(X)$ der zugehörige rationale Funktionenkörper. Dann ist $R$ keine endlich erzeugte $K$-Algebra.*

*Beweis*. Sei angenommen, dass die rationalen Funktionen $F_i = \frac{P_i}{Q_i}$, $i = 1, \ldots, n$, ein endliches Erzeugendensystem von $K(X)$ bilden, mit $P_i, Q_i \in K[X]$, $Q_i \neq 0$. Durch Übergang zu einem Hauptnenner kann man annehmen, dass $Q_i = Q$ konstant ist. Die Annahme bedeutet also insbesondere, dass der Körper der rationalen Funktionen sich durch Nenneraufnahme an nur einem Element ergeben würde. Da $Q$ keine Konstante ist (sonst wäre $K[X] = K(X)$, was nicht der Fall ist), ist $Q - 1 \neq 0$ und daher ist $\frac{1}{Q-1} \in K(X)$. Also gibt es eine Darstellung

$$\frac{1}{Q-1} = \frac{P}{Q^s}$$

mit einem geeigneten $s$. Daraus folgt $Q^s = (Q-1)P$. Da $Q^s$ und $Q - 1$ das Einheitsideal erzeugen, folgt daraus, dass bereits $Q - 1$ das Einheitsideal erzeugt, also selbst eine Einheit ist. Dann wäre $Q$ aber doch eine Konstante, was es nicht ist. □

Die folgende Aussage ist die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes.

Satz 10.7. *Sei $K$ ein Körper und sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, die (als $K$-Algebra) endlich erzeugt sei. Dann ist $L$ endlich über $K$.*

*Beweis*. Wir setzen $L = K[x_1, \ldots, x_n]$. Sei $K_i$ der Quotientenkörper von $K[x_1, \ldots, x_i]$ (innerhalb von $L$). Wir haben also eine Körperkette

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = L\,.$$

Wir wollen zeigen, dass $L$ endlich über $K$ ist, und dazu genügt es nach Satz 2.8 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2011)) zu zeigen, dass jeder Schritt in der Körperkette endlich ist. Sei angenommen, dass $K_i \subseteq K_{i+1}$ nicht endlich ist, aber alle folgenden Schritte endlich sind. Wir wenden Lemma 10.5 auf

$$K \subseteq K_{i+1} \subseteq L$$

an und erhalten, dass $K_{i+1}$ endlich erzeugt über $K$ ist. Dann ist insbesondere $K_{i+1}$ auch endlich erzeugt über $K_i$. Andererseits ist $K_{i+1}$ der Quotientenkörper von $K_i[x_{i+1}]$. Wir haben also eine Kette

$$K_i \subseteq K_i[x_{i+1}] \subseteq Q(K_i[x_{i+1}]) = K_{i+1}\,,$$

wo $K_{i+1}$ endlich erzeugt über $K_i$ ist, aber nicht endlich. Wäre $x_{i+1}$ algebraisch über $K_i$, so auch endlich, und dann wäre $K_i[x_{i+1}]$ bereits ein Körper nach Aufgabe 10.2. Dann wäre die letzte Kette insgesamt endlich, im Widerspruch zur Wahl von $i$. Also ist $x_{i+1}$ transzendent über $K_i$. Dann ist aber $K_i[x_{i+1}]$ isomorph zu einem Polynomring in einer Variablen und $Q(K_i[x_{i+1}])$ ist isomorph zum rationalen Funktionenkörper über $K_i$. Dieser ist aber nach Lemma 10.6 nicht endlich erzeugt, so dass sich erneut ein Widerspruch ergibt. □

Satz 10.8. *Sei $K$ ein Körper und seien $A$ und $B$ zwei $K$-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : A \to B$ ein $K$-Algebra-Homomorphismus. Dann ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ aus $B$ auch das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal.*

*Beweis.* Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal aus $B$. Wir wissen, dass unter jedem Ringhomomorphismus das Urbild eines Primideals wieder prim ist, also ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ zunächst ein Primideal, das wir $\mathfrak{p}$ nennen. Wir erhalten induzierte Ringhomomorphismen

$$K \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{m} = L\,,$$

wobei $L$ ein Körper ist und wobei beide Homomorphismen injektiv und von endlichem Typ sind. Da die Gesamtabbildung von endlichem Typ ist und $K$ und $L$ Körper sind, folgt nach Satz 10.7, dass diese Abbildung endlich ist. Wir wollen zeigen, dass $A/\mathfrak{p}$ ein Körper ist. Dies folgt aber aus Aufgabe 10.3. □

Satz 10.9. *Sei $K$ ein Körper und sei $A$ eine $K$-Algebra von endlichem Typ. Dann ist jedes Radikal in $A$ der Durchschnitt von maximalen Idealen.*

*Beweis.* Nach Aufgabe 10.7 ist jedes Radikal der Durchschnitt von Primidealen. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Primideal in einer endlich erzeugten Algebra der Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in der Nenneraufnahme $B := A_f$. Es gibt ein (in $A_f$) maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A_f$ oberhalb von $\mathfrak{p}A_f$. Wir fassen $A_f$ als endlich erzeugte $K$-Algebra auf und betrachten

$$\varphi\colon\ A \longrightarrow A_f.$$

Dann ist $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ und $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Nach Satz 10.8 ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal. □

Satz 10.10. *Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $A$ eine endlich erzeugte $K$-Algebra. Dann ist jeder Restklassenkörper von $A$ isomorph zu $K$. Anders formuliert: Jedes maximale Ideal ist ein Punktideal.*

*Beweis.* Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal der endlich erzeugten $K$-Algebra $A$ und betrachte

$$K \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} =: L\,.$$

Hier ist $L$ ein Körper und zugleich eine endlich erzeugte $K$-Algebra. Nach Satz 10.7 muss also $L$ eine endliche $K$-Algebra sein. Da $K$ algebraisch abgeschlossen ist, muss $K = L$ sein. □

Für den Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K$ bedeutet das, dass alle maximalen Ideale die Form $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ besitzen. Die maximalen Ideale entsprechen also den Koordinatentupeln $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Dies ist mit Punktideal gemeint.