

## Algebraische Kurven

### Vorlesung 10

#### Noethersche Moduln

Wir wollen zeigen, dass für einen noetherschen Ring  $R$  und einen endlich erzeugten  $R$ -Modul jeder  $R$ -Untermodule wieder endlich erzeugt ist. Solche Moduln nennt man noethersch.

DEFINITION 10.1. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann heißt  $M$  *noethersch*, wenn jeder  $R$ -Untermodule von  $M$  endlich erzeugt ist.

In den folgenden Aussagen verwenden wir folgende Sprech- bzw. Schreibweise.

DEFINITION 10.2. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $M_1, M_2, M_3$   $R$ -Moduln. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von  $R$ -Moduln, wenn  $M_1$  ein  $R$ -Untermodule von  $M_2$  ist, und wenn  $M_3$  ein Restklassenmodul von  $M_2$  ist, der isomorph zu  $M_2/M_1$  ist.

LEMMA 10.3. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von  $R$ -Moduln. Dann ist  $M$  genau dann noethersch, wenn sowohl  $M_1$  als auch  $M_3$  noethersch sind.

*Beweis.* Sei zunächst  $M$  noethersch, und  $U \subseteq M_1$  ein Untermodul. Dann ist  $U$  direkt auch ein Untermodul von  $M$ , also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Sei nun  $V \subseteq M_3$  ein Untermodul des Restklassenmoduls. Das Urbild von  $V$  in  $M$  unter der Restklassenabbildung sei  $\tilde{V}$ . Dieser Modul ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, und die Bilder eines solchen Erzeugendensystems erzeugen auch den Bildmodul  $V$ .

Seien nun die äußeren Moduln  $M_1$  und  $M_3$  noethersch, und sei  $U \subseteq M$  ein Untermodul. Es sei  $U_3 \subseteq M_3$  der Bild-Untermodule davon.  $U_3$  wird von endlich vielen Elementen  $s_1, \dots, s_n$  erzeugt, und wir können annehmen, dass diese  $s_i = \bar{r}_i$  die Bilder von Elementen  $r_i \in U$  sind. Betrachte  $U \cap M_1$ . Dies ist ein Untermodul von  $M_1$ , und daher endlich erzeugt, sagen wir von  $t_1, \dots, t_k$ , die wir als Elemente in  $U$  auffassen. Wir behaupten, dass

$$r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_k$$

ein Erzeugendensystem von  $U$  bilden. Sei dazu  $m \in U$  ein beliebiges Element. Dann ist  $\bar{m} = \sum_{i=1}^n a_i s_i$  und daher geht das Element  $m - \sum_{i=1}^n a_i r_i$  rechts auf null. Dann gehört es aber zum Kern der Restklassenabbildung, also zu  $M_1$ . Andererseits gehört dieses Element auch zu  $U$ , also zum Durchschnitt  $M_1 \cap U$ , der ja von den  $t_1, \dots, t_k$  erzeugt wird. Also kann man schreiben

$$m - \sum_{i=1}^n a_i r_i = \sum_{j=1}^k b_j t_j$$

bzw.  $m = \sum_{i=1}^n a_i r_i + \sum_{j=1}^k b_j t_j$ . □

**SATZ 10.4.** *Sei  $R$  ein noetherscher Ring und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann ist  $M$  ein noetherscher Modul.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Modul-Erzeuger von  $M$ . Bei  $n = 0$  liegt der Nullmodul vor. Sei  $n = 1$ . Dann gibt es eine surjektive Abbildung  $R \rightarrow M \cong R/\mathfrak{a}$  vor. Nach Fakt \*\*\*\*\* ist aber ein Restklassenmodul eines noetherschen Moduls wieder noethersch, und der Ring selbst ist nach Voraussetzung noethersch, also ist  $M$  noethersch.

Sei nun  $n \geq 2$  und die Aussage für kleinere  $n$  bereits bewiesen. Sei  $m_1, \dots, m_n$  ein Erzeugendensystem von  $M$ . Wir betrachten den durch  $m_1, \dots, m_{n-1}$  erzeugten  $R$ -Untermodul, den wir mit  $M_1$  bezeichnen. Dieser Untermodul gibt Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz, nämlich

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 =: M_3 \longrightarrow 0.$$

Hier wird der linke Modul von  $n - 1$  Elementen erzeugt und ist nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Der rechte Modul wird von der Restklasse von  $m_n$ , also von einem Element erzeugt, also noethersch. Nach Fakt \*\*\*\*\* ist dann  $M$  noethersch. □

### Hilbertscher Nullstellensatz - algebraische Version

Wir wollen die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes beweisen. Dazu benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

**LEMMA 10.5.** *Sei  $R$  ein noetherscher kommutativer Ring und  $A$  eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra. Es sei  $B \subseteq A$  eine  $R$ -Unteralgebra, über der  $A$  endlich (als  $B$ -Modul) sei. Dann ist auch  $B$  eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra.*

*Beweis.* Wir schreiben  $A = R[x_1, \dots, x_n]$  und  $A = Ba_1 + \dots + Ba_m$  mit  $a_i \in A$ . Wir setzen

$$x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} a_j \quad \text{und} \quad a_i a_j = \sum_{k=1}^m b_{ijk} a_k$$

mit Koeffizienten  $b_{ij}, b_{ijk} \in B$ . Wir betrachten die von diesen Koeffizienten erzeugte  $R$ -Unteralgebra  $S$  von  $B$  und den  $S$ -Modul  $\tilde{A} = Sa_1 + \dots + Sa_m$ .

Die Produkte  $a_i a_j$  gehören wieder zu diesem Modul, daher ist  $\tilde{A}$  sogar eine  $S$ -Algebra. Weil die  $x_i$  ebenfalls zu  $\tilde{A}$  gehören, gilt sogar  $A = \tilde{A}$ . Dies bedeutet, dass  $A$  ein endlicher  $S$ -Modul ist. Nach Fakt \*\*\*\*\* ist  $S$  ein noetherscher Ring und nach Fakt \*\*\*\*\* ist der  $S$ -Untermodule  $B \subseteq A$  ebenfalls endlicher  $S$ -Modul. Die Kette  $R \subseteq S \subseteq B$  zeigt schließlich, dass  $B$  eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra ist.  $\square$

LEMMA 10.6. *Sei  $K$  ein Körper und  $R = K(X)$  der zugehörige rationale Funktionenkörper. Dann ist  $R$  keine endlich erzeugte  $K$ -Algebra.*

*Beweis.* Sei angenommen, dass die rationalen Funktionen  $F_i = \frac{P_i}{Q_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ein endliches Erzeugendensystem von  $K(X)$  bilden, mit  $P_i, Q_i \in K[X]$ ,  $Q_i \neq 0$ . Durch Übergang zu einem Hauptnenner kann man annehmen, dass  $Q_i = Q$  konstant ist. Die Annahme bedeutet also insbesondere, dass der Körper der rationalen Funktionen sich durch Nenneraufnahme an nur einem Element ergeben würde. Da  $Q$  keine Konstante ist (sonst wäre  $K[X] = K(X)$ , was nicht der Fall ist), ist  $Q - 1 \neq 0$  und daher ist  $\frac{1}{Q-1} \in K(X)$ . Also gibt es eine Darstellung

$$\frac{1}{Q-1} = \frac{P}{Q^s}$$

mit einem geeigneten  $s$ . Daraus folgt  $Q^s = (Q-1)P$ . Da  $Q^s$  und  $Q-1$  das Einheitsideal erzeugen, folgt daraus, dass bereits  $Q-1$  das Einheitsideal erzeugt, also selbst eine Einheit ist. Dann wäre  $Q$  aber doch eine Konstante, was es nicht ist.  $\square$

SATZ 10.7. *Sei  $K$  ein Körper und sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung, die (als  $K$ -Algebra) endlich erzeugt sei. Dann ist  $L$  endlich über  $K$ .*

*Beweis.* Wir setzen  $L = K[x_1, \dots, x_n]$ . Sei  $K_i$  der Quotientenkörper von  $K[x_1, \dots, x_i]$  (innerhalb von  $L$ ). Wir haben also eine Körperkette

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = L.$$

Wir wollen zeigen, dass  $L$  endlich über  $K$  ist, und dazu genügt es zu zeigen, dass jeder Schritt in der Körperkette endlich ist. Sei angenommen, dass  $K_i \subseteq K_{i+1}$  nicht endlich ist, aber alle folgenden Schritte endlich sind. Wir wenden Fakt \*\*\*\*\* auf

$$K \subseteq K_{i+1} \subseteq L$$

an und erhalten, dass  $K_{i+1}$  endlich erzeugt über  $K$  ist. Dann ist insbesondere  $K_{i+1}$  auch endlich erzeugt über  $K_i$ . Andererseits ist  $K_{i+1}$  der Quotientenkörper von  $K_i[x_{i+1}]$ . Wir haben also eine Kette

$$K_i \subseteq K_i[x_{i+1}] \subseteq Q(K_i[x_{i+1}]) = K_{i+1},$$

wo  $K_{i+1}$  endlich erzeugt über  $K_i$  ist, aber nicht endlich. Wäre  $x_{i+1}$  algebraisch über  $K_i$ , so auch endlich, und dann wäre  $K_i[x_{i+1}]$  bereits ein Körper. Dann wäre die letzte Kette insgesamt endlich, im Widerspruch zur Wahl von

*i.* Also ist  $x_{i+1}$  transzendent über  $K_i$ . Dann ist aber  $K_i[x_{i+1}]$  isomorph zu einem Polynomring in einer Variablen und  $Q(K_i[x_{i+1}])$  ist isomorph zu einem rationalen Funktionenkörper über  $K_i$ . Dieser ist aber nach Fakt \*\*\*\*\* nicht endlich erzeugt, so dass sich erneut ein Widerspruch ergibt.  $\square$

**SATZ 10.8.** *Sei  $K$  ein Körper und seien  $A$  und  $B$  zwei  $K$ -Algebren von endlichem Typ. Es sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus. Dann ist für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  aus  $B$  auch das Urbild  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  ein maximales Ideal.*

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal aus  $B$ . Wir wissen, dass unter jedem Ringhomomorphismus das Urbild eines Primideals wieder prim ist, also ist  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  zunächst ein Primideal, das wir  $\mathfrak{p}$  nennen. Wir erhalten induzierte Ringhomomorphismen

$$K \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{m} = L,$$

wobei  $L$  ein Körper ist und wobei beide Homomorphismen injektiv und von endlichem Typ sind. Da die Gesamtabbildung von endlichem Typ ist und  $K$  und  $L$  Körper sind, folgt nach Fakt \*\*\*\*\*, dass diese Abbildung endlich ist. Dann ist erst recht die hintere Abbildung endlich. Wir wollen zeigen, dass  $A/\mathfrak{p}$  ein Körper ist. Dies folgt aber aus Fakt \*\*\*\*\*.

**SATZ 10.9.** *Sei  $K$  ein Körper und sei  $A$  eine  $K$ -Algebra von endlichem Typ. Dann ist jedes Radikal in  $A$  der Durchschnitt von maximalen Idealen.*

*Beweis.* Wir wissen, dass jedes Radikal der Durchschnitt von Primidealen ist. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Primideal in einer endlich erzeugten Algebra der Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal und  $f \notin \mathfrak{p}$ . Dann ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in der Nenneraufnahme  $B := A_f$ . Es gibt ein (in  $A_f$ ) maximales Ideal  $\mathfrak{m} \subset A_f$  oberhalb von  $\mathfrak{p}A_f$ . Wir fassen  $A_f$  als endlich erzeugte  $K$ -Algebra auf und betrachten  $\varphi : A \rightarrow A_f$ . Dann ist  $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  und  $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ . Nach Fakt \*\*\*\*\* ist  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  maximal.  $\square$

**SATZ 10.10.** *Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei  $A$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra. Dann ist jeder Restklassenkörper von  $A$  isomorph zu  $K$ . Anders formuliert: Jedes maximale Ideal ist ein Punktideal.*

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal der endlich erzeugten  $K$ -Algebra  $A$  und betrachte

$$K \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} =: L.$$

Hier ist  $L$  ein Körper und zugleich eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra. Nach Fakt \*\*\*\*\* muss also  $L$  eine endliche  $K$ -Algebra sein. Da  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, muss  $K = L$  sein.  $\square$