Fachbereich Mathematik/Informatik **25. Juni 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Reelle und angewandte Analysis (Mathematik III)

Nachklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	3	4	4	6	2	4	5	7	5	3	9	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *abzählbare* Menge.
(2) Eine σ-*Algebra* auf einer Menge M.
(3) Der *Kegel* zu einer Grundmenge (Basis) $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer Spitze $P \in \mathbb{R}^3$.
(4) Ein *zusammenhängender* topologischer Raum X.
(5) Die *Tangentialabbildung in einem Punkt* $P \in M$ zu einer differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N,$$

wobei M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.
(6) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to M$.
(7) Eine *geschlossene Differentialform* ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(8) Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand*.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße*.
(2) Die *Tschebyschow-Abschätzung* (Tschebyschow-Ungleichung) für eine messbare nichtnegative Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
(3) Die *Formel für das Volumen des Rotationskörpers* (zum Subgraphen) zu einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(4) Der *Satz von Stokes* für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Aufgabe 3. (4 (2+2) Punkte)

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von $0,5$ cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von $0,1$ mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

a) Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)?

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei M eine Menge und es sei $T_n \uparrow M$ eine Ausschöpfung von M mit Teilmengen $T_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq M \times \mathbb{R}$ der Subgraph zur Indikatorfunktion e_{T_n}. Zeige, dass die A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung von $M \times [0, 1]$ bilden.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Beweise die Tschebyschow-Abschätzung (Tschebyschow-Ungleichung) für eine messbare nichtnegative Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.

Aufgabe 7. (6 (3+3) Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$, wobei G mit dem zweidimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^2 versehen sei. Berechne die beiden folgenden Integrale.

a) $\int_G x \, d\lambda^2$

b) $\int_G y \, d\lambda^2$

Aufgabe 8. (2 Punkte)
Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Zeige, dass die drei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |(x,y)| = 1\}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ paarweise nicht homöomorph sind.

Aufgabe 10. (5 Punkte)
Sei X ein Torus. Man gebe eine surjektive differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

an derart, dass auch die Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi) : T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}X$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ surjektiv ist.

Aufgabe 11. (7 (3+4) Punkte)
Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma : [1, c] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^3),$$

(mit $c \geq 1$) und

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (u^3, u^2 + v^2, u^{-1}v^{-1}),$$

und die Differentialform

$$\omega = (x - y)dx - z^2dy + dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, xy - z^3).$$

Berechne die Matrix der Abbildung

$$\bigwedge^2 T_P(\varphi) : \bigwedge^2 T_P\mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^2 T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^2$$

im Punkt $P = (1,3,5)$ bzgl. einer geeigneten Basis.

Aufgabe 13. (3 (2+1) Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

die durch

$$f(t) = \frac{\sin^3(t^4)}{1+t^2}$$

a) Berechne die äußere Ableitung von f.

b) Berechne die äußere Ableitung von $f dt$.

Aufgabe 14. (9 Punkte)

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

gibt derart, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.