**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2012**

# Mathematik für Anwender II

## Arbeitsblatt 32

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 32.1. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 32.2. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 32.3. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Metrik auf $T$ in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 32.4. Zeige, dass auf jeder Menge $X$ die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 32.5.*

Es seien $P = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ und $Q = \left(2, \frac{1}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 32.6. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge $X$ sind offen.
(2) Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und seien $U_i$, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.

(3) Es sei $I$ eine endliche Indexmenge und seien $U_i$, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Aufgabe 32.7. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 32.8. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.9. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass in $X$ die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten $x$ und $y$ gibt es offene Mengen $U$ und $V$ mit
$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

Aufgabe 32.10. Sei $X$ eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von $X$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.11. Zeige, dass die Menge
$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.12. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.13. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.14. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 32.15. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 32.16. Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 32.17. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von $T$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.18. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.19. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \operatorname{Rand}(T)$$

offen ist.

Aufgabe 32.20. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von $T$ genau dann leer ist, wenn $T$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.21. (2 Punkte)

Es seien $P = \left(3, \frac{5}{2}, 0\right)$ und $Q = \left(1, -6, \frac{2}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 32.22. (4 Punkte)

Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $T \subseteq Y$ genau dann offen in $Y$ ist, wenn es eine in $X$ offene Menge $U$ gibt mit $T = Y \cap U$.

Aufgabe 32.23. (4 Punkte)

Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Zeige, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen $x$ konvergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 32.24. (3 Punkte)

Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass $T$ genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\operatorname{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

Aufgabe 32.25. (4 Punkte)

Es seien $P$ und $Q$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und $G$ die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass $G$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 32.26. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.