Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008/2009
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 26

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Man gebe für jedes n ein Beispiel von zwei aus der Schule bekannten ebenen algebraischen Kurven, die sich in genau einem Punkt mit Schnittmultiplizität n schneiden.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Es sei eine monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ (mit d, e teilerfremd) gegeben. Berechne die Schnittmultiplizität der Kurve mit einer jeden Geraden G durch den Nullpunkt.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Es seien zwei verschiedene monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ und $D = V(X^r - Y^s)$ gegeben (mit d, e und r, s teilerfremd). Berechne die Schnittmultiplizität der beiden Kurven im Nullpunkt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $C = V(F)$ und $D = V(G)$ ebene algebraische Kurven. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt, so dass der lokale Ring $R = (K[X,Y]_{\mathfrak{m}})/(F)$ ein diskreter Bewertungsring ist. Zeige, dass die Beziehung

$$\operatorname{mult}_P(F, G) = \operatorname{ord}(G)$$

gilt, wobei ord die Ordnung im Bewertungsring R bezeichnet.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Betrachte die Parabel $C = V(Y - X^2)$ und den Kreis D mit Mittelpunkt $(0, r)$ und Radius r. Bestimme die Schnittpunkte von C und D und die jeweiligen Schnittmultiplizitäten.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Bestimme für den Restklassenring $\mathbb{C}[X,Y]/(XY - 1, X^2 + Y^2 - a)$ (für jedes $a \in \mathbb{C}$) eine Beschreibung als Produktring von lokalen Ringen. Man gebe dabei die $\mathbb{C}$-Dimensionen der beteiligten Ringe an.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Bestimme für die Kurve $V(X^3 + Y^3 - 3XY + 1)$ die singulären Punkte über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$. Man gebe jeweils die Multiplizität und die Tangenten an.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei $P = (a, b)$ ein Punkt in der affinen Ebene und L und L' zueinander senkrechte Geraden durch P. Es sei $C = V(F), F \in K[X, Y]$, eine ebene algebraische Kurve. Beschreibe explizit eine Variablentransformation (einen Koordinatenwechsel) derart, dass in den neuen Koordinaten P der Nullpunkt wird und die Geraden zum Achsenkreuz werden. Wie lautet die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten?

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Betrachte die durch $y = 2x^4 + 3x^2 - x + 1$ gegebene Kurve mit dem Punkt $P = (1, 5)$. Finde eine Koordinatentransformation, dass P zum Punkt $(0, 0)$ wird und die Tangente an P zur x-Achse.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Betrachte die durch $y = 2x^4+3x^2-x+1$ gegebene Kurve im Punkt $P = (1, 5)$ in den in Aufgabe 9 gefundenen Koordinaten. Bestimme die Potenzreihe für die Kurve in P entlang der Tangente.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der Potenzreihenring. Zeige, dass es in R keine Quadratwurzel für T gibt. Zeige ferner, dass für $K = \mathbb{Z}/(7)$ das Element $T + 2$ eine Quadratwurzel in R besitzt, und gebe die ersten fünf Koeffizienten von einer Quadratwurzel davon an.

Die folgende Aufgabe wurde schonmal gestellt.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale, reduzierte K-Algebra. Zeigen Sie, dass dann A ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K ist.