Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 23

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 23.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei N ein R-Modul mit R-Untermoduln $L \subseteq M \subseteq N$. Zeige, dass die Restklassenmoduln durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

miteinander in Beziehung stehen.

AUFGABE 23.2. Sei R ein kommutativer Ring und $P = R[X_1, \ldots, X_m]$ der Polynomring darüber in m Variablen. Es sei $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_m)$ das von den Variablen erzeugte Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{m}^n = P_{\geq n}$ ist, wobei $P_{\geq n}$ das Ideal in P bezeichnet, das von allen homogenen Polynomen vom Grad $\geq n$ erzeugt wird.

AUFGABE 23.3. Sei R ein kommutativer Ring mit zwei Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$. Es sei $S = R/\mathfrak{b}$ und $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}S$ das Bildideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}^n S = \tilde{\mathfrak{a}}^n$ ist.

AUFGABE 23.4.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$X^3 + XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$$

und bestimme die Singularitäten der zugehörigen affinen Kurve samt ihren Multiplizitäten und Tangenten.

AUFGABE 23.5.*

Bestimme die Multiplizität und die Tangenten im Nullpunkt $(0, 0)$ der ebenen algebraischen Kurve

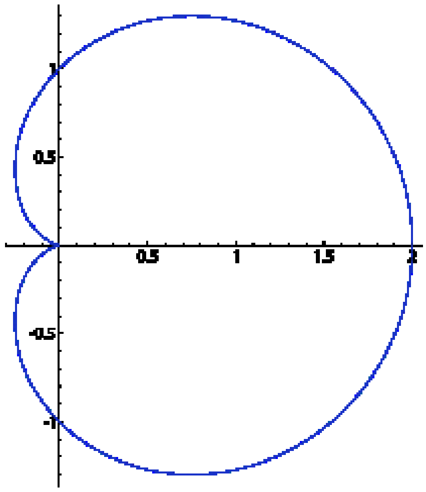
$$C = V(Y^4 + X^3 + 3XY^2 + 2X^2Y) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}.$$

Aufgabe 23.6.*

Bestimme über die partiellen Ableitungen für das durch das Polynom

$$V^3 + U^2V - 2UV + 2U^2 - 4U - 2V$$

gegebene Nullstellengebilde einen singulären Punkt. Führe eine Koordinatentransformation durch, die diesen Punkt in den Nullpunkt überführt. Bestimme die Multiplizität und die Tangenten in diesem Punkt.



Aufgabe 23.7. Bestimme die Singularitäten (mit Multiplizitäten und Tangenten) der durch

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide*.

Aufgabe 23.8. Berechne für das durch die Erzeuger 4 und 9 gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.7 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 6$.

In einigen Aufgaben wird die Krull-Dimension eines kommutativen Ringes verwendet. Da wir uns hauptsächlich für Kurven interessieren, denen eindimensionale Ringe entsprechen, werden wir keine systematische Dimensionstheorie entwickeln.

Sei R ein kommutativer Ring. Eine Kette aus Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

nennt man *Primidealkette der Länge* n (es wird also die Anzahl der Inklusionen gezählt, nicht die Anzahl der beteiligten Primideale). Die *Dimension* (oder *Krulldimension*) von R ist das Supremum über alle Längen von Primidealketten.

Aufgabe 23.9. Sei R ein Hauptidealbereich, der kein Körper sei. Zeige, dass die Krulldimension von R eins ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.10. (4 Punkte)

Berechne für das durch die Erzeuger $5, 8, 11$ gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.7 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 5$.

Aufgabe 23.11. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring, das in genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ als einzigem Primoberideal enthalten sei. Zeige, dass dann $R/\mathfrak{a} \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{a}R_\mathfrak{m}$ ist. Folgere daraus, dass für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem noetherschen kommutativen Ring die Isomorphie $R/\mathfrak{m}^n \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n R_\mathfrak{m}$ für jedes n gilt.

Aufgabe 23.12. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Zeige, dass R die Krulldimension zwei besitzt.

Aufgabe 23.13. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) R hat Krulldimension null.
(2) R ist ein artinscher Ring.
(3) R besitzt endlich viele Primideale, die alle maximal sind.
(4) Es gibt eine natürliche Zahl n mit $\mathfrak{m}^n = 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$.
(5) Die Reduktion von R ist ein Produkt von Körpern.

Aufgabe 23.14. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring von endlicher Krulldimension d. Zeige, dass die Krulldimension des Polynomrings $R[X]$ mindestens $d + 1$ ist.

(Bemerkung: über einem noetherschen Grundring erhöht sich die Dimension beim Übergang zum Polynomring genau um eins, dies ist aber schwieriger zu beweisen.)