Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 4

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 4.1. Untersuche diese Folgen auf Konvergenz und bestimme (falls möglich) den Grenzwert:

(1) $a_n = \frac{3n^2-7n+1}{2n^2+n-1}$,
(2) $b_n = \frac{n-1}{n+1} + (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n^2+1}$,
(3) $c_n = \frac{n-1}{n+1} + (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$,
(4) $d_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$,
(5) $e_n = \frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 4.2. Betrachte die durch $x_0 := 1, x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? Konvergiert die Folge?

Aufgabe 4.3. Zeige mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die durch

$$x_1 := 1, x_{n+1} := \frac{2+x_n}{1+x_n}$$

rekursiv definierte Folge konvergiert.

Aufgabe 4.4. Bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch

$$a_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4.5. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweise den folgenden Satz (Satz von Olivier): Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann ist $(n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 4.6. (4 Punkte)

Untersuche diese Folgen auf Konvergenz und bestimme (falls möglich) den Grenzwert:

(1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$,
(2) $b_n = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Aufgabe 4.7. (4 Punkte)

Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ konvergiert (ohne explizit ihren Grenzwert zu berechnen).