Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 35

Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion

Nachdem wir nun rationale Funktionen integrieren können, können wir auch für eine ganze Reihe von Funktionen eine Stammfunktion finden, die wir durch gewisse Standardsubstitution auf eine rationale Funktion zurückführen können.

Lemma 35.1. *Es sei f eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion, d.h. es gebe Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$t = \ln s$$

das Integral $\int f(t)\, dt$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen.

Beweis. Bei der Substitution $t = \ln s$ ist

$$dt = \frac{1}{s} ds\,,$$

und für die Polynome $P(e^t)$ und $Q(e^t)$ ergeben sich

$$P(e^t) = P(e^{\ln s}) = P(s) \text{ und } Q(e^t) = Q(e^{\ln s}) = Q(s)\,.$$

Insgesamt ergibt sich also die rationale Funktion $\frac{P(s)}{sQ(s)}$. In deren Stammfunktion muss man dann $s = e^t$ einsetzen. □

Im vorstehenden Lemma geht es um die zusammengesetzten Funktionen vom Typ

$$U \xrightarrow{\exp} \mathbb{R} \xrightarrow{\frac{P}{Q}} \mathbb{R}\,,$$

wobei der Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$U = \{z \in \mathbb{R} |\, Q(e^z) \neq 0\}$$

festgelegt ist.

Beispiel 35.2. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{e^t + e^{3t}}$$

finden. Das in Lemma 35.1 beschriebene Verfahren führt auf die rationale Funktion

$$\frac{1}{(s+s^3)s} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

so dass die Partialbruchzerlegung direkt vorliegt. Die Stammfunktion von dieser rationalen Funktion ist

$$-\frac{1}{s} - \arctan s\,.$$

Die Stammfunktion von f ist daher

$$-\frac{1}{e^t} - \arctan e^t\,.$$

Neben dem Polynomring $K[X]$ in einer Variablen über einem Körper K gibt es auch Polynomringe in mehreren Variablen, wobei wir im Folgenden nur den Polynomring in zwei Variablen benötigen. Man schreibt ihn als $K[X,Y]$ und definiert ihn am einfachsten als

$$(K[X])[Y]\,,$$

wobei der Grundring kein Körper ist. Jedenfalls besteht dieser Ring aus allen Polynomen in zwei Variablen, also aus Ausdrücken der Form

$$a_{00}+a_{10}X+a_{01}Y+a_{20}X^2+a_{11}XY+a_{02}Y^2+a_{30}X^3+a_{21}X^2Y+a_{12}XY^2+\ldots\,.$$

Entsprechend gibt es auch rationale Funktionen in zwei Variablen. Diese sind wiederum Quotienten aus zwei Polynomen in zwei Variablen. Wenn man in eine solche Funktion in zwei Variablen zwei Funktionen in einer Variablen einsetzt, so erhält man wieder eine Funktion in einer Variablen. Dies ist der Fall in den folgenden Situationen.

Korollar 35.3. *Es sei eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen* $\sinh$ *und* $\cosh$ *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome* P *und* Q *in zwei Variablen mit* $Q \neq 0$ *derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sinh t\,, \cosh t\,)}{Q(\sinh t\,, \cosh t\,)}$$

gilt. Dann lässt sich das Integral

$$\int f(t)\,dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion in der Exponentialfunktion zurückführen und damit lösen.

Beweis. Mit

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ und } \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

erhält man eine rationale Funktion in e^t und $e^{-t} = (e^t)^{-1}$, so dass insgesamt eine rationale Funktion in der Eponentialfunktion vorliegt. Deren Stammfunktion lässt sich wie in Lemma 35.1 beschrieben finden. □

Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen

LEMMA 35.4. *Es sei eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen* $\sin t$ *und* $\cos t$ *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome* P *und* Q *in zwei Variablen mit* $Q \neq 0$ *derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sin t, \cos t)}{Q(\sin t, \cos t)}$$

gilt. Dann führt die Substitution

$$t = 2 \arctan s$$

das Integral

$$\int f(t)\, dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion zurück.

Beweis. Bei der Substitution $t = 2\arctan s$ ist $s = \tan \frac{t}{2}$ und

$$dt = \frac{2}{1+s^2} ds .$$

Aus den trigonometrischen Funktionen wird unter Verwendung von Satz 25.11

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 2s\frac{1}{1+s^2}. \end{aligned}$$

und

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \\ &= 2\frac{1}{1+s^2} - 1 \\ &= \frac{1-s^2}{1+s^2}. \end{aligned}$$

Da sowohl das Differential dt als auch die trigonometrischen Funktionen bei dieser Substitution rationale Ausdrücke in s sind, liegt nach dieser Substitution insgesamt eine rationale Funktion vor. □

BEISPIEL 35.5. Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin t}$$

berechnet sich unter Verwendung von Lemma 35.4 folgendermaßen.

$$\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \int \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2}\, ds = \int \frac{1}{s}\, ds.$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{\sin t}$ ist daher $\ln\left(\tan \frac{t}{2}\right)$.

Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in Wurzelfunktionen

LEMMA 35.6. *Es sei f eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}$ (mit $a,b,r,s \in \mathbb{R}$, $a, rx+s \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$), d.h. es gebe zwei Polynome in zwei Variablen, $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(x) = \frac{P(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}})}{Q(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}})}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$x = \frac{su^n - b}{a - ru^n}$$

die Berechnung von $\int f(x)dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion in u zurückführen.

Beweis. Wir können $sa - rb \neq 0$ annehmen, da sonst Zähler und Nenner im Wurzelausdruck linear abhängig sind und man teilen könnte. Bei der angegebenen Substitution ist

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}} = \sqrt[n]{\frac{a\frac{su^n-b}{a-ru^n} + b}{r\frac{su^n-b}{a-ru^n} + s}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[n]{\frac{a(su^n-b)+b(a-ru^n)}{r(su^n-b)+s(a-ru^n)}}\\
&= \sqrt[n]{\frac{asu^n-bru^n}{-rb+sa}}\\
&= u.
\end{aligned}$$

Da die Ableitung der rationalen Funktion $x = \frac{su^n-b}{a-ru^n}$ nach u wieder eine rationale Funktion in u ist, ist das Gesamtergebnis nach dieser Substitution eine rationale Funktion in u. □

LEMMA 35.7. *Es sei f eine rationale Funktion in x und in $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und so, dass ax^2+bx+c auch positive Werte annimmt), schreiben kann, d.h. es gebe zwei Polynome in zwei Variablen, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(x) = \frac{P(x,\sqrt{ax^2+bx+c})}{Q(x,\sqrt{ax^2+bx+c})}$$

gilt. Dann kann man durch eine Substitution der Form

$$x = \alpha t + \beta$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$), die Berechnung von $\int f(x)dx$ auf ein Integral der Form

(1) $\int R(t,\sqrt{1-t^2})dt$,
(2) $\int R(t,\sqrt{t^2-1})dt$,
(3) $\int R(t,\sqrt{t^2+1})dt$,

zurückführen, wobei R wieder eine rationale Funktion in zwei Variablen ist. In diesen drei Fällen führen die Substitutionen

(1) $t = \sin s$,
(2) $t = \cosh s$,
(3) $t = \sinh s$,

auf das Integral über eine rationale Funktion in trigonometrischen Funktionen bzw. in Hyperbelfunktionen

Beweis. Durch eine Substitution der Form $u = \sqrt{a}x$ bzw. $u = \sqrt{-a}x$ vereinfacht sich die Quadratwurzel zu $\sqrt{u^2+\tilde{b}u+\tilde{c}}$ bzw. zu $\sqrt{-u^2+\tilde{b}u+\tilde{c}}$. Quadratisches Ergänzen führt zu $\sqrt{v^2+\tilde{e}}$ bzw. $\sqrt{-v^2+\tilde{e}}$. Durch eine weitere Substitution der Form $w = \frac{v}{\sqrt{\tilde{e}}}$ erhält man $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{w^2+1}$ oder $\sqrt{-\tilde{e}}\sqrt{w^2-1}$ oder aber[1] $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{-w^2+1}$. Dies sind alles affin-lineare Substitutionen. Die Ergebnisse unter der Gesamtsubstitution sind von der angegebenen Art. Wenn es sich um ein Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t,\sqrt{1-t^2})$$

[1]Der Fall $\sqrt{-w^2-1}$ ist nicht möglich, da dann die ursprüngliche Funktion für keine reelle Zahl definiert wäre.

handelt, so führt $t = \sin s$ zu

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 s} = \sqrt{\cos^2 s} = \cos s$$

und zu

$$dt = (\sin s)' ds = \cos s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen $\sin s$ und $\cos s$ ergibt.

Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t, \sqrt{t^2-1})$$

führt $t = \cosh s$ zu

$$\sqrt{t^2-1} = \sinh s$$

und zu

$$dt = (\cosh s)' ds = \sinh s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt.

Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t, \sqrt{t^2+1})$$

führt $t = \sinh s$ zu

$$\sqrt{t^2+1} = \cosh s$$

und zu

$$dt = (\sinh s)' ds = \cosh s \, ds,$$

so dass sich wieder eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt. $\square$

Beispiel 35.8. Wir wollen für die Funktion

$$\frac{1}{s^2 \sqrt{1-s^2}^3}$$

eine Stammfunktion bestimmen. Mit der in Lemma 35.7 beschriebenen Substitution

$$s = \sin t \text{ und } ds = \cos t \, dt$$

werden wir auf die Funktion

$$\frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^3 t} \cdot \cos t = \frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}$$

geführt. Mit der in Lemma 35.4 beschriebenen Substitution

$$t = 2 \arctan u,\ dt = \frac{2}{1+u^2} du,\ \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \text{ und } \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

werden wir auf die rationale Funktion

$$\frac{(1+u^2)^2}{4u^2} \cdot \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} \cdot \frac{2}{1+u^2} = \frac{(1+u^2)^3}{2u^2(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{u^6+3u^4+3u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

geführt. Hierfür müssen wir die Partialbruchzerlegung finden. Die Division mit Rest ergibt

$$u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1 = (2u^6 - 4u^4 + 2u^2) \cdot \frac{1}{2} + 5u^4 + 2u^2 + 1\,,$$

so dass es also um die rationale Funktion

$$\frac{1}{2} + \frac{5u^4 + 2u^2 + 1}{2u^6 - 4u^4 + 2u^2}$$

geht. Diese Funktion ist eine rationale Funktion in $v = u^2$, so dass wir die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2}}{v^3 - 2v^2 + v} = \frac{\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2}}{v(v-1)^2}$$

bestimmen. Der Ansatz

$$\frac{\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2}}{v(v-1)^2} = \frac{a}{v} + \frac{b}{v-1} + \frac{c}{(v-1)^2}$$

führt zu

$$\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2} = a(v-1)^2 + bv(v-1) + cv\,.$$

Einsetzen von $v = 0$, $v = 1$ und $v = 2$ führt zu

$$\frac{1}{2} = a\,,$$

$$4 = c\,,$$

und

$$\frac{25}{2} = a + 2b + 2c = \frac{1}{2} + 2b + 8, \text{ also } b = 2\,.$$

Daher ist

$$\frac{\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2}}{v(v-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{v} + \frac{2}{v-1} + \frac{4}{(v-1)^2}$$

bzw.

$$\frac{\frac{5}{2}u^4 + u^2 + \frac{1}{2}}{u^2(u^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{u^2} + \frac{2}{u^2-1} + \frac{4}{(u^2-1)^2}\,.$$

Mit den Identitäten

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(u^2-1)^2} &= \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u-1)(u+1)} \\
&= \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}
\end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$\frac{\frac{5}{2}u^4 + u^2 + \frac{1}{2}}{u^2(u^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{u^2} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2}\,.$$

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{2} + \frac{5u^4 + 2u^2 + 1}{2u^6 - 4u^4 + 2u^2}$$

ist daher

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}\,\tan\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right) + 1}$$

eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}\,,$$

und

$$\frac{1}{2}\,\tan\left(\frac{\arcsin s}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin s}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin s}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin s}{2}\right) + 1}$$

ist eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{s^2\sqrt{1-s^2}^3}\,.$$