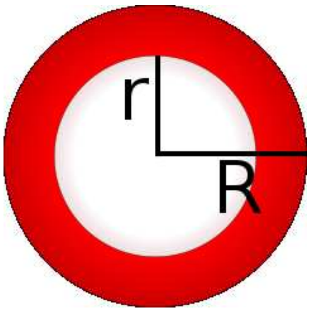
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 57

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 57.1. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



Aufgabe 57.2. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

Aufgabe 57.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y)$$

flächentreu ist.

Aufgabe 57.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+\sin y\,, y+\cos x\,).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det (D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgabe 57.5. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante davon. Ebenso für z^4.

Aufgabe 57.6. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 57.7. Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich -1 ist.

Tipp: Was passiert mit dem Einheitswürfel?

Aufgabe 57.8. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass φ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 57.9. Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-volumentreuer Diffeomorphismus. Es sei G zusammenhängend. Zeige, dass entweder $(J(\varphi))(x) = 1$ für alle $x \in G$ oder aber $(J(\varphi))(x) = -1$ für alle $x \in G$ gilt.

Aufgabe 57.10. Bestimme durch Integration die x- und die $y-$Koordinate des Schwerpunkts der oberen Einheitshalbkugel (siehe Beispiel 56.12).

Aufgabe 57.11. Man gebe ein Beispiel eines Diffeomorphismus

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

auf offenen Mengen $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer kompakten Teilmenge $T \subseteq G$ an derart, dass für den Schwerpunkt S von T und den Schwerpunkt S' von $\varphi(T)$ *nicht* $\varphi(S) = S'$ gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 57.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det (D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $Q_2 = [1,2] \times [1,2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

Aufgabe 57.13. (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0,10] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graph) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

Aufgabe 57.14. (3 Punkte)

Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

Aufgabe 57.15. (4 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix zur Abbildung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,\ z \longmapsto z^n,$$

in einem beliebigen Punkt $P = (a,b)$ mit der Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 57.16. (3 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen $y_1, \ldots, y_n$. Es sei

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Massenverteilung auf T mit der Gesamtmasse $M > 0$. Zeige, dass

$$t_i = \frac{1}{M} \int_T y_i \cdot f d\lambda^n$$

die i-te Koordinate des Schwerpunktes von T bezüglich dieser Basis ist.

Aufgabe 57.17. (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass unter den Polarkoordinaten der Schwerpunkt einer kompakten Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ *nicht* in den Schwerpunkt des Bildes $\varphi(T)$ überführt werden muss.