Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 2

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1. Finde die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 + px = 0$$

($p \in \mathbb{C}$) direkt und mit Hilfe der Formel von Cardano.

Aufgabe 2.2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 2.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $z \in L$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\ x \longmapsto zx,$$

K-linear ist.

Aufgabe 2.4. Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und es sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es dann ein $x \in L$, $x \notin K$, mit $x^2 \in K$ gibt.

Aufgabe 2.5. Es sei $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen dieses Polynoms. Konstruiere unter Bezug auf die Formel von Cardano eine Kette

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq M \subseteq N$$

von endlichen Körpererweiterungen von „möglichst kleinem“ Grad, so dass M alle Nullstellen und alle „Hilfszahlen“, die in dieser Formel auftreten, enthält. Welche Grade können dabei auftreten?

Aufgabe 2.6. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 2.7. Zeige, dass die Menge der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ einen Körper bildet.

(Dieser Körper wird mit $\mathbb{R}(X)$ bezeichnet.)

Aufgabe 2.8. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 2.9. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in L$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in L$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[i]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2.11. (2 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L. Zeige, dass die Multiplikation auf L durch die Produkte

$$x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$

eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 2.12. (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann

$$K \cap L = \mathbb{Q}$$

ist.

Aufgabe 2.13. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 2.14. (3 Punkte)

Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$, wobei $\mathbb{R}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen bezeichnet, nicht endlich ist.