Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 1

Mengen

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein Paradies, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden" meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M\,.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist wohl, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

Neben endlichen Auflistungen gibt es auch noch solche Auflistungen, bei denen nach einer endlichen Auflistung eine unendliche Weiterführung durch Punkte $(\ldots)$ angedeutet wird. Damit ist gemeint, dass die ersten Elemente der Auflistung einen Bildungsprozess erkennen lassen, mit dem man alle weiteren Elemente bestimmen kann. Beispiele sind

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\},\ \{9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$$

und ähnliche. Dies ist grundsätzlich problematisch, da es für jede endliche Liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n Zahlen ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \ldots + c_d k^d$$

vom Grad $d \leq n$ gibt mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2, \ldots, P(n) = a_n .$$

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x (x \in N \rightarrow x \in M)$.

Es gibt also stets ein mehr oder weniger einfaches polynomiales Bildungsgesetz, das aber oben nur im linken Beispiel die vermutlich gemeinte Vorschrift ist.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wir werden diese Menge erstmal so akzeptieren und später noch eine Axiomatik dafür angeben.[2] Wichtig ist aber, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M : E(x)\} = \{x \in M : x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}.$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\},$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\},$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Quadratzahl}\},$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an

[2] Und zwar werden wir später die natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome axiomatisieren, bis dahin verwenden wir sie aber schon manchmal, vor allem in Beispielen, ebenso wie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K : x \text{ kommt aus Osnabrück}\},$$

$$P = \{x \in K : x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\},$$

$$D = \{x \in K : x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\}.$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x : x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\}.$$

Mengenoperationen

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*
$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\},$$
- *Durchschnitt*
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\},$$
- *Differenzmenge*
$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$CA = G \setminus A = \{x \in G : x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

Konstruktion von Mengen

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie bspw. den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ (die man sicher auch ohne jede tiefere Rechtfertigung als Menge akzeptieren kann) durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[3] Wir definieren[4]

Definition 1.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) : x \in L,\ y \in M\}$$

die *Produktmenge*[5] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

Beispiel 1.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

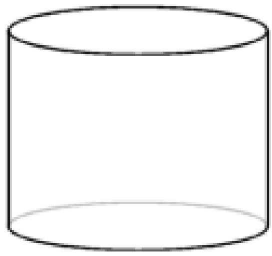
[3]darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

[4]Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Namen (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Namen wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt

[5]Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen

die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktmengen A und B gegeben sind, bspw. als Teilmengen einer Ebene E, so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auf in einer kleineren Dimension realisieren kann.



Beispiel 1.3. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge der Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subset E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 1.4. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}(M) = \{T : T \text{ ist Teilmenge von } M\}.$$

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

Abbildungen

DEFINITION 1.5. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F : L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen

$$F, G : L \longrightarrow M$$

sind gleich, wenn sie die gleiche Definitionsmenge und die gleiche Wertemenge besitzen und wenn für alle $x \in L$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in M gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Zu zwei Mengen L und M bezeichnet man die *Menge der Abbildungen* von L nach M mit

$$\operatorname{Abb}(L, M) = \{f : L \to M :\ f \text{ Abbildung}\}.$$

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\ x \longmapsto x,$$

also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow M,\ x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[6]

Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der

[6]Von Hilbert stammt die etwas überaschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Definition 1.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M : \text{ es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von S* unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \text{Bild}\,(F)$$

das *Bild der Abbildung*.

Definition 1.7. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L : F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T* unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von y*.

Injektive und surjektive Abbildungen

Definition 1.8. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

- *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

- *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.

- *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 1.9. Es sei $F : L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G : M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Hintereinanderschaltung von Abbildungen

Definition 1.10. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) = G(F(x))\,,$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Beispiel 1.11. Es sei P eine Menge von Personen, die ein Café besucht, G eine Menge von Getränken, die auf der Getränkekarte des Cafés aufgelistet sind, und Z die Arbeitskräfte im Café, die für die Zubereitung verschiedener Getränke zuständig sind. Es wird eine Bestellung aufgegeben, wobei jede Person $p \in P$ genau ein Getränk $g = g(p) \in G$ bestellt, d.h. man hat eine (Bestell-)Abbildung

$$\beta : P \longrightarrow G,\ p \longmapsto \beta(p).$$

Die Injektivität der Abbildung bedeutet, dass alle Personen ein verschiedenes Getränk bestellen (was sein kann oder nicht sein kann, das ist eben eine Eigenschaft der Bestellung=Abbildung) und die Surjektivität bedeutet, dass jedes Getränk der Karte mindestens einmal bestellt wird. Das Bild der Abbildung ist die Menge aller Getränke, die von der Personengruppe bestellt wird (mindestens ein Mal). Dies ist eine Teilmenge der Getränkemenge. Zu einer Teilmenge S der Personen, also bspw. alle Frauen oder alle Männer oder alle mit großem Durst gehört die Bildmenge $\beta(S)$, die aus allen Getränken besteht, die diese Teilmenge bestellt.

Zu einer Teilmenge $T \subseteq G$ der Getränkemenge ist das Urbild $\beta^{-1}(T)$ die Menge aller Personen, deren bestelltes Getränk zu T gehört. Wenn A die alkoholischen Getränke sind und H die Heißgetränke, so ist $\beta^{-1}(A)$ die Teilmenge der Personen, die was Alkoholisches bestellt hat und $\beta^{-1}(H)$ sind die Heißgetränkeliebhaber.

Im Café ist für jede Getränkeart genau ein Zubereiter zuständig. Alle Kaffeeähnlichen Getränke werden von Bertha zubereitet, alle Cocktails von Heinz geschüttelt, für's Bier ist Claudia zuständig, etc. Dies kann man als eine Zuständigkeitsabbildung

$$\varphi : G \longrightarrow Z,\ g \longmapsto \varphi(g),$$

auffassen. Auf dem Dienstplan wird wahrscheinlich diese Abbildung dadurch beschrieben, dass zu jedem Zubereiter $z \in Z$ das Urbild $\varphi^{-1}(\{z\})$ angegeben wird, also die Teilmenge der Getränke, für die z zuständig ist. Die Zuständigkeitsabbildung ist vermutlich surjektiv, da jeder Zubereiter für mindestens ein Getränk zuständig sein sollte (wenn man mit der Gesamtpersonalmenge Z' arbeitet, sieht das anders aus). Injektiv ist sie vermutlich nicht, denn das würde bedeuten, dass jeder Zubereiter nur für ein Getränk zuständig ist. Zu einer Teilmenge T der Getränkemenge ist das Bild $\varphi(T)$ diejenige Teilmenge der Zubereiter, die genau alle Zubereiter dieser Getränketeilmenge umfasst. Zu $U \subseteq Z$ ist $\varphi^{-1}(U)$ die Teilmenge aller Getränke, deren zuständiger Zubereiter zu U gehört.

Alle Personen waren nun hoch zufrieden mit ihren Getränken und wollen über die Bedienung einen Dankesgruß an die jeweiligen Zubereiter ihrer Getränke weiterreichen. Besucher Hans war mit seinem Bier sehr zufrieden, das von Claudia ausgeschenkt wurde, deshalb möchte Hans die Claudia grüßen.

Die Hintereinanderschaltung aus der Bestellungsabbildung β und der Zubereitungsabbildung φ ergibt dann die Grußabbildung

$$\gamma = \varphi \circ \beta : P \longrightarrow Z,\, p \longmapsto \varphi(\beta(p)).$$

Es gelten vielfache Beziehungen zwischen den Einzelabbildungen und der Gesamtabbildung. Bspw. gilt

$$\gamma^{-1}(\{\text{Heinz}\}) = \beta^{-1}(\varphi^{-1}(\{\text{Heinz}\})) = \beta^{-1}(\text{Cocktails}) = ,$$

d.h., die Menge der Personen, die Heinz grüßen, ist gleich der Menge der Personen, die einen Cocktail bestellt haben. Wenn die Bestellung nicht injektiv ist, so kann auch die Grußabbildung nicht injektiv sein, die Umkehrung muss aber nicht gelten.

Lemma 1.12. *Es seien L, M, N und P, Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$
$$G : M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta : L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x). \end{aligned}$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis