Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 5

Verknüpfungen

Aufgabe 5.1. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a,b) \longmapsto a-b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 5.2. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit dem Betrag der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a,b) \longmapsto \mid a-b \mid .$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 5.3. Es sei S eine Menge und

$$M = \operatorname{Abb}(S,S)$$

sei versehen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung. Ist die Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es ein (eindeutiges) neutrales Element, für welche $F \in M$ gibt es ein inverses Element?

Aufgabe 5.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 5.5. Es sei I eine Menge und M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$\star : M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \star y.$$

Definiere auf der Abbildungsmenge

$$\mathrm{Abb}\,(I, M) = \{F : I \to M :\ F \text{ Abbildung}\}$$

eine Verknüpfung unter Bezug auf die vorgegebene Verknüpfung. Übertragen sich die Eigenschaften Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes, Existenz von inversen Elementen?

Aufgabe 5.6. Sei M die Menge der Abbildungen einer zweielementigen Menge in sich selbst, also

$$M = \{f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}\}\,.$$

Benenne die Elemente aus M und lege eine Wertetabelle für die Verknüpfung auf M an, die durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen definiert ist.

Aufgabe 5.7. Es sei M eine Menge und

$$F : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto F(x, y),$$

eine Verknüpfung. Formuliere verschiedene Verknüpfungseigenschaften in dieser (unüblichen) Notation.

Aufgaben zu Peano-Axiomen

Aufgabe 5.8. Zeige, das zwei Mengen $\mathbb{N}_1$ und $\mathbb{N}_2$, die beide die Peano-Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind. Man gebe also eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ an, die 0_1 in 0_2 überführt und die die Nachfolgeabbildungen respektiert.

Aufgabe 5.9. Zeige ausgehend von den Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

Aufgabe 5.10. Sei $\mathbb{N}$ eine Menge, die die Peano-Axiome erfüllt. Definiere eine „natürliche“ Addition auf $\mathbb{N}$ und zeige, dass diese Addition kommutativ und assoziativ ist und 0 als neutrales Element besitzt.

Aufgabe 5.11. Sei $\mathbb{N}$ eine Menge, die die Peano-Axiome erfüllt. Definiere eine „natürliche“ Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Zeige, dass diese Multiplikation kommutativ und assoziativ ist, und dass sie $1 := 0'$ als neutrales Element besitzt.

Zeige ferner, dass für diese Multiplikation und für die in Aufgabe 3 definierte Addition das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass die übliche Addition und Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen (also das schriftliche Addieren und Multiplizieren durch gewisse Ziffernmanipulationen im Zehnersystem) korrekt ist.

Induktionsaufgaben

Aufgabe 5.13. Formuliere das Induktionsprinzip für Aussagen quantorenlogisch.

Aufgabe 5.14. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Aufgabe 5.15. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 5.16. Man gebe eine Formel an für die Differenz zwischen der Summe der ersten n geraden Kubikzahlen und der Summe der ersten n ungeraden Kubikzahlen.

Aufgabe 5.17. Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Aufgabe 5.18. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung
$$2^n \geq n^2$$
gilt.

Aufgabe 5.19. Die Folge a sei rekursiv definiert durch
$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2\,.$$
Zeige, dass
$$a_n = \frac{1}{2} n!$$
gilt.

Aufgabe 5.20. Beweise durch Induktion die Abschätzung
$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

Aufgaben zu Binomialkoeffizienten

Aufgabe 5.21. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
erfüllen.

Aufgabe 5.22. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 5.23. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man im Lotto „Sechs aus Neunundvierzig“?

Aufgabe 5.24. Beweise die Formel
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$
Rechne dies explizit für $n \leq 6$ nach.

Aufgabe 5.25. Beweise die Formel
$$n2^n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$

Aufgabe 5.26. Seien k und d natürliche Zahlen. Zeige, dass die Anzahl aller k-Tupel

$$(d_1, \ldots, d_k) \text{ mit } d_i \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{i=1}^{k} d_i \leq d$$

gleich

$$\binom{d+k}{k}$$

ist.

Polynomialkoeffizienten

Definition 5.27. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m = (m_1, \ldots, m_k)$ ein k-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

Aufgabe 5.28. Es seien $a_1, \ldots, a_k$ reelle Zahlen. Beweise den Polynomialsatz, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{m=(m_1,\ldots,m_k),\, \sum_{i=1}^{k} m_i = n} \binom{n}{m} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k}\,.$$