**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Mathematik I

## Arbeitsblatt 9

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Zeige, dass das *Quadrieren*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

eine wachsende Funktion ist. Man folgere daraus, dass auch die Quadratwurzel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \sqrt{u},$$

eine wachsende Funktion ist.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen $s$ und $t$ die Beziehung

$$\sqrt{st} = \sqrt{s}\sqrt{t}$$

besteht.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen $a, b$ angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 9.3. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) $i^{1011}$.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 9.4. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 9.5. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Ring, aber kein Körper ist.

Aufgabe 9.7. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$.
(2) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r\operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r\operatorname{Im}(z).$$

(5) $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 9.8. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 9.9. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles $z$ stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z||w|$.
(5) $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/|z|$.

Aufgabe 9.10. Bestätige die in Beispiel 9.12 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 9.11. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 5iz - 3 = 0\,.$$

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.12. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+i)^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 9.13. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 9.14. (2 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung $z$ gibt.

Aufgabe 9.15. (3 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Man charakterisiere, wann es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt und wann zwei Lösungen.

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von $i$.

Aufgabe 9.17. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen $z$, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 9.18. (4 Punkte)

Man schreibe eine Computeranimation, die die Intervallschachtelung für die eulersche Zahl aus Lemma 9.1 bis zum zehnten Schritt berechnet und darstellt.

## Testklausur

Die Testklausur findet am 12. Dezember 2009 um 10.00 Uhr in 66/E33 und 66/E34 statt.