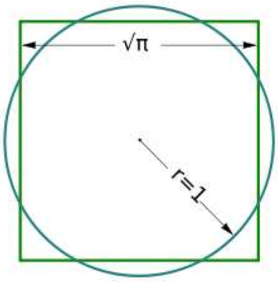
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

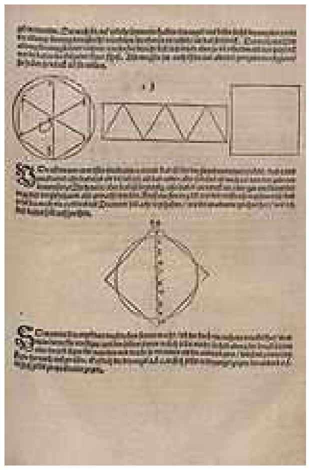
Vorlesung 24



Unter den drei klassischen Problemen der antiken Mathematik versteht man

(1) die Quadratur des Kreises,
(2) die Dreiteilung des Winkels,
(3) die Würfelverdoppelung.

Dabei sollen diese Konstruktionen ausschließlich mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden, wobei dies natürlich präzisiert werden muss. Nach langen vergeblichen Versuchen, solche Konstruktionen zu finden, ergab sich im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts die Erkennntnis, dass es keine solche Konstruktionen geben kann. Dies erfordert natürlich, dass man eine Übersicht über alle möglichen Konstruktionen erhalten kann.



Auch Albrecht Dürer hatte Spaß an der Quadratur des Kreises

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Unter der Ebene verstehen wir im Folgenden die Anschauungsebene, die wir später mit $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren. Zunächst sind die Konstruktionen „koordinatenfrei“.

Definition 1. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Eine Gerade $G \subset E$ heißt aus M *elementar konstruierbar*, wenn es zwei Punkte $P, Q \in M$, $P \neq Q$, gibt derart, dass die Verbindungsgerade von P und Q gleich G ist. Ein Kreis $C \subseteq E$ heißt aus M *elementar konstruierbar*, wenn es zwei Punkte $Z, S \in M$, $Z \neq S$, gibt derart, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt Z und durch den Punkt S gleich C ist.

Man kann also an zwei Punkte aus der vorgegebenen Menge M das *Lineal anlegen* und die dadurch definierte Gerade zeichnen, und man darf die *Nadelspitze des Zirkels* in einen Punkt der Menge stechen und die *Stiftspitze des Zirkels* an einen weiteren Punkt der Menge anlegen und den Kreis ziehen.

Wenn ein Koordinatensystem vorliegt, und zwei Punkte $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ gegeben sind, so ist die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte bekanntlich

$$(p_1 - q_1)y + (q_2 - p_2)x + q_1p_2 - q_2p_1 = 0\,.$$

Wenn zwei Punkte $Z = (z_1, z_2)$ und $S = (s_1, s_2)$ gegeben sind, so besitzt der Kreis mit dem Mittelpunkt Z durch den Punkt S die Kreisgleichung

$$(x - z_1)^2 + (y - z_2)^2 - (s_1 - z_1)^2 - (s_2 - z_2)^2 = 0\,.$$

Definition 2. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Dann heißt ein Punkt $P \in E$ aus M *in einem Schritt konstruierbar*, wenn eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft.

(1) Es gibt zwei aus M elementar konstruierbare Geraden G_1 und G_2 mit $G_1 \cap G_2 = \{P\}$.
(2) Es gibt eine aus M elementar konstruierbare Gerade G und einen aus M elementar konstruierbaren Kreis C derart, dass P ein Schnittpunkt von G und C ist.
(3) Es gibt zwei aus M elementar konstruierbare Kreise C_1 und C_2 derart, dass P ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist.

Definition 3. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Dann heißt ein Punkt $P \in E$ aus M *konstruierbar* (oder *mit Zirkel und Lineal konstruierbar*), wenn es eine Folge von Punkten

$$P_1, \ldots, P_n = P$$

gibt derart, dass P_i jeweils aus $M \cup \{P_1, \ldots, P_{i-1}\}$ in einem Schritt konstruierbar ist.

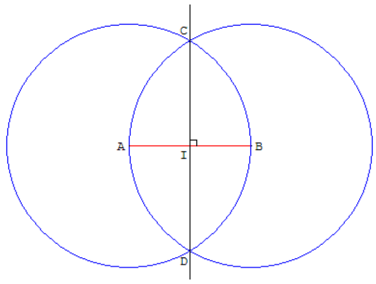
Definition 4. Eine Zahl $z \in \mathbb{C} \cong E$ heißt *konstruierbar* oder *konstruierbare Zahl*, wenn sie aus der Startmenge

$$\{0, 1\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Bemerkung 5. Man startet also mit zwei beliebig vorgegebenen Punkten, die man 0 und 1 nennt und die dann die arithmetische Funktion übernehmen, die mit diesen Symbolen verbunden wird. Als erstes kann man die Gerade durch 0 und 1 ziehen, und diese Gerade wird mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ identifiziert. Wir werden gleich sehen, dass man eine zu $\mathbb{R}$ senkrechte Gerade durch 0 konstruieren kann, mit deren Hilfe ein *kartesisches Koordinatensystem* entsteht und mit dem wir die Ebene mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ identifizieren können.

In den folgenden Konstruktionen verwenden wir einige Begrifflichkeiten aus der euklidischen Geometrie, wie Winkel, senkrecht, parallel, Stricke und elementare Grundtatsachen wie die Strahlensätze, Symmetriesätze und den Satz des Pythagoras.



Lemma 6. *In der Ebene lassen sich folgende Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen.*

(1) *Zu einer Geraden G und zwei Punkten $Q_1, Q_2 \in G$ kann man die zu G senkrechte Gerade zeichnen, die die Strecke zwischen Q_1 und Q_2 halbiert.*
(2) *Zu einer Geraden G und einem Punkt $P \in G$ kann man die zu G senkrechte Gerade durch P zeichnen.*
(3) *Zu einer Geraden G und einem Punkt P kann man die zu G senkrechte Gerade durch P zeichnen.*
(4) *Zu einer gegebenen Geraden G und einem gegebenen Punkt P kann man die Gerade G' durch P zeichnen, die zu G parallel ist.*

Beweis. Wir verwenden im Beweis einige elementargeometrische Grundtatsachen.

(1) Wir zeichnen die beiden Kreise C_1 und C_2 mit dem Mittelpunkt Q_1 durch Q_2 und umgekehrt. Die beiden Schnittpunkte von C_1 und C_2 seien S_1 und S_2. Deren Verbindungsgerade steht senkrecht auf G und halbiert die Strecke zwischen Q_1 und Q_2.
(2) Man zeichnet einen Kreis C mit P als Mittelpunkt und einem beliebigen Radius (dazu braucht man neben P noch einem weiteren Punkt). Es seien Q_1 und Q_2 die beiden Schnittpunkte der Gerade G mit C. Für diese beiden Punkte führen wir die in (1) beschriebene Konstruktion durch. Diese Halbierungsgerade läuft dann durch P und steht senkrecht auf G.
(3) Wenn P auf der Geraden liegt, sind wir schon fertig mit der Konstruktion in (2). Andernfalls zeichnen wir einen Kreis mit P als Mittelpunkt mit einem hinreichend großen Radius derart, dass sich zwei Schnittpunkte Q_1 und Q_2 mit der Geraden ergeben (dafür braucht man, dass mindestens ein weiterer Punkt zur Verfügung steht). Dann führt wieder die erste Konstruktion zum Ziel.

(4) Dafür führt man zuerst die Konstruktion der Senkrechten S durch P wie in (3) beschrieben durch. Mit P und S führt man dann die Konstruktion (2) durch. □

Arithmetische Eigenschaften von konstruierbaren Zahlen

LEMMA 7. *Sei $P = (x, y) \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein Punkt in der Ebene. Dann ist P genau dann konstruierbar, wenn die beiden Koordinaten x und y konstruierbar sind.*

Beweis. Zunächst einmal kann man aufgrund der vorgegebenen Punkte die x-Achse und dann wegen Lemma 24.6(2) die dazu senkrechte Achse durch 0, also die y-Achse, konstruieren. Es steht also das Achsenkreuz zur Verfügung. Wenn nun P gegeben ist, so kann man aufgrund von Lemma 24.6(4) die zu den Achsen parallelen Geraden zeichnen und erhält somit die Koordinatenwerte. Den y-Wert kann man dann noch mit einem Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt auf die x-Achse transportieren. Wenn umgekehrt die beiden Koordinaten gegeben sind, so kann man durch diese die senkrechten Geraden zeichnen und deren Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt. □

LEMMA 8. *Es sei G eine mit 0 und 1 markierte Gerade, die wir mit den reellen Zahlen identifizieren. Es seien zwei Punkte a , $b \in G$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Die Summe $a + b$ ist (mit Zirkel und Lineal) konstruieren.*
(2) *Das Produkt ab ist konstruierbar.*
(3) *Bei $b \neq 0$ ist der Quotient a/b konstruierbar.*

Beweis. (1) Wir verwenden eine zu G senkrechte Gerade H und darauf einen Punkt $x \neq 0$. Dazu nehmen wir die zu H senkrechte Gerade G' durch x, die also parallel zu G ist. Wir zeichen die Gerade H', die parallel zu H ist und durch $a \in G$ verläuft. Der Schnittpunkt von H' und G' markieren wir als a', so dass der Abstand von a' zu x gleich a ist. Jetzt zeichnen wir die Gerade L durch b und x und dazu die parallele Gerade L' durch a'. Der Schnittpunkt von L' mit G ist $y = a + b$, da x, b, a', y ein Parallelogramm bilden. Zum Beweis von (2) und (3) verwenden wir wieder die zu G senkrechte Gerade H, wobei wir Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt durch 1, a und b schlagen und die entsprechenden Punkte auf H als $1'$, a' und b' markieren. Dabei wählt man $1'$ als einen der beiden Schnittpunkte und a' und b' müssen dann auf den entsprechenden Halbgeraden sein. Um das Produkt zu erhalten, zeichnet man die Gerade L durch a und $1'$ und dazu die parallele Gerade L' durch b'. Diese Gerade schneidet G in genau einem Punkt x. Für diesen Punkt gilt nach dem Strahlensatz das Steckenverhältnis

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{1'} = \frac{b}{1}.$$

Also ist $x = ab$. Um den Quotienten $\frac{a}{b}$ bei $b \neq 0$ zu erhalten, zeichnet man die Gerade T durch 1 und b' und dazu parallel die Gerade T' durch a'. Der Schnittpunkt von T' mit G sei z. Aufgrund des Strahlensatzes gilt die Beziehung

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{1}{z}.$$

□

Satz 9. *Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist ein Unterkörper von* $\mathbb{C}$.

Beweis. Die 0 und die 1 sind als Ausgangsmenge automatisch drin. Zu einem Punkt P gehört auch der „gegenüberliegende“ Punkt $-P$ dazu, da man ihn konstruieren kann, indem man die Gerade durch P und 0 und den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius P zeichen kann; der zweite Schnittpunkt von diesem Kreis und dieser Geraden ist $-P$. Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist also unter dem Negativen abgeschlossen.

Aufgrund von Lemma 26.7 kann man sich beim Nachweis der Körpereigenschaften darauf beschränken, dass die reell-konstruierbaren Zahlen einen Körper bilden. Dies folgt aber aus Lemma 26.8. □

Konstruktion von Quadratwurzeln

Wenn man sich zwei Punkte 0 und 1 vorgibt und man die dadurch definierte Gerade mit $\mathbb{R}$ identifiziert, so wird diese Gerade durch 0 in zwei Hälften (Halbgeraden) unterteilt, wobei man dann diejenige Hälfte, die 1 enthält, als positive Hälfte bezeichnet. Aus solchen positiven reellen Zahlen kann man mit Zirkel und Lineal die Quadratwurzel ziehen.

Lemma 10. *Es sei G eine mit zwei Punkten* 0 *und* 1 *markierte Gerade, die wir mit den reellen Zahlen identifizieren. Es sei $a \in G_+$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ aus $0, 1, a$ mittels Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Beweis. Wir zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt 0 durch 1 und markieren den zweiten Schnittpunkt dieses Kreises mit G als -1. Wir halbieren die Strecke zwischen

-1 und a gemäß Lemma 26.6(1) und erhalten den konstruierbaren Punkt $M = \frac{a-1}{2} \in G$. Der Abstand von M zu a als auch zu -1 ist dann $\frac{a-1}{2}$. Wir zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $\frac{a-1}{2}$ und markieren einen der Schnittpunkte des Kreises mit der zu G senkrechten Geraden H durch 0 als x. Wir wenden den *Satz des Pythagoras* an auf das Dreieck mit den Ecken $0, x, M$. Daraus ergibt sich

$$x^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a - 1)}{4} = \frac{4a}{a} = a.$$

Also repräsentiert x die Quadratwurzel aus a. □

KOROLLAR 11. *Es sei ein Rechteck in der Ebene gegeben. Dann lässt sich mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruieren.*

Beweis. Die Längen der Rechteckseiten seien a und b. Wir wählen einen Eckpunkt des Rechtecks als Nullpunkt und verwenden die Geraden durch die anliegenden Rechteckseiten als Koordinatenachsen. Wir wählen willkürlich einen Punkt 1 auf einer der Achsen und schlagen einen Kreis um den Nullpunkt durch den Eckpunk auf der anderen Achse, so dass beide Seitenlängen auf der mit 0 und 1 markierten Achse liegen. Darauf führen wir die Multiplikation ab nach Lemma 26.8 durch. Aus diesem Produkt zieht man nun gemäß Lemma 26.10 die Quadratwurzel und erhält somit $\sqrt{ab}$. Mit dieser Streckenlänge konstruiert man ein Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des vorgegebenen Rechtecks ist. $\square$

Man beachte, dass im Beweis der vorstehenden Aussage die Zahl ab von der Wahl der 1 abhängt, nicht aber $\sqrt{ab}$ und damit natürlich auch nicht die Seitenlänge des konstruierten Quadrats.

Abbildungsverzeichnis