Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 3.1. Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 3.2. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3.3. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $12, 15, 16, 20$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3.4. Finden Sie in Ihrem Alltagsleben möglichst viele Relationen.

Aufgabe 3.5. Es sei S die Menge der Städte und A die Menge der Autobahnen und $L \subseteq S \times A$ die in Beispiel 3.2 beschriebene Relation.

Beschreibe formal die Menge der Städte T, die an mindestens einer Autobahn liegen.

Beschreibe formal die Menge der Städte U, die an mindestens zwei Autobahnen liegen.

Interpretiere die Aussage

$$\forall s_1 \forall s_2 \exists a (s_1 La \wedge s_2 La)\,,$$

wobei s_1 und s_2 aus T seien. Ist die Aussage wahr?

Formuliere formal die Aussage, dass zwei Städte stets durch maximal zwei (durch maximal drei) Autobahnen miteinander verbunden sind.

Aufgabe 3.6. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer $0, 1, 2$ und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 3.7. Es sei M eine n-elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu M.

Aufgabe 3.8. Es sei M eine Menge und I die Menge der echten Teilmengen von M, also

$$I = \{T \subseteq M : T \neq \emptyset \text{ und } T \neq M\}\,.$$

Diese Menge ist durch die Inklusion eine geordnete Menge. Bestimme die minimalen und die maximalen Elemente von I.

Aufgabe 3.9. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Betrachte die Relation auf P, die durch

$$T(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 3.10. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Betrachte die Relation auf P, die durch

$$T(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \cap B = \emptyset$$

gegeben ist (dabei sind also A und B Teilmengen von M). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn M n Elemente besitzt.

Aufgabe 3.11. Es sei A eine endliche total geordnete Menge. Es sei $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge. Definiere auf der Produktmenge

$$A^I = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}$$

die „lexikographische Ordnung“, und zeige, dass es sich dabei ebenfalls um eine totale Ordnung handelt.

Aufgabe 3.12. Zeigen Sie, dass für Relationen Reflexivität, Symmetrie und Transitivät voneinander unabhängig sind.

Aufgabe 3.13. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *antisymmetrisch* einer Relation R in der Relationstabelle zu R widerspiegeln.

Aufgabe 3.14. Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M, die

(1) reflexiv
(2) symmetrisch
(3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 3.15. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 3.16. Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?

Aufgabe 3.17. Seien A und B Mengen. Sei weiter

$$A \times B \colon = \{(x, y) \mid x \in A,\, y \in B\}$$

das kartesische Produkt von A und B. Eine *Relation* von A nach B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

Ist R eine Relation von A nach B und S eine Relation von B nach C, so ist die Komposition

$$S \circ R \colon = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

Weisen Sie nach, dass die Komposition von Relationen assoziativ ist, also die Gleichheit

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

gilt.

Aufgabe 3.18. Seien A und B Mengen. Sei weiter

$$A \times B \colon = \{(x, y) \mid x \in A,\, y \in B\}$$

das kartesische Produkt von A und B. Eine *Relation* von A nach B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Die *Umkehrrelation* R^{-1} ist gegeben durch

$$(y, x) \in R^{-1} \;\Leftrightarrow\; (x, y) \in R.$$

Eine *Abbildung*von A nach B ist eine Relation f von A nach B mit der Eigenschaft, dass für jedes Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert. Zeigen Sie, dass die Umkehrrelation einer Abbildung f genau dann eine Abbildung ist, wenn f bijektiv ist.

AUFGABE 3.19. Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?